motivieren statt deduzieren

Martin Lieberherr
Emmetten
Feb. 2009

Inhalt

- Einleitung
- Beispiele
- Diskussion

Einleitung

Studierende neigen dazu, den theorielastigen Stil von ETH/Uni auf den gymnasialen Unterricht zu übertragen: An den Anfang werden Definitionen gestellt, aus denen mathematisch mehr oder weniger schlüssig Gesetze hergeleitet werden. Dahinter steckt vielleicht die Idee, dass nur die mathematisch-deduktive Methode echtes Verständnis ermöglicht.

Warum eine Grösse so und nicht anders definiert wird, ist oft nicht bekannt. Herleitungen werden manchmal so verstümmelt („didaktisch reduziert“), dass sie kontraproduktiv wirken.

Einleitung (ff.)

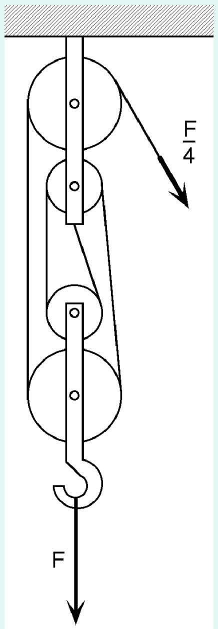
Heuristische und induktive Methoden werden als minderwertig angeschaut, obwohl sie manchmal physikalisch-didakisch besser, da einfacher, ehrlicher und schneller, sind.

Heuristische Methoden sind wichtig, denn häufig steht ja keine Theorie zur Verfügung, aus der man etwas ableiten könnte.

1. Beispiel: Arbeit

StudentIn: Arbeit ist definiert als „Kraft mal Weg“. Wir werden später sehen, warum diese Definition wichtig ist....

Die ExpertIn motiviert die Definition: Beim Flaschenzug haben wir die goldene Regel der Mechanik kennen gelernt.. aus ihr folgt, dass „Kraft mal Weg“ auf der Last- und Kraftseite gleich sind (...)

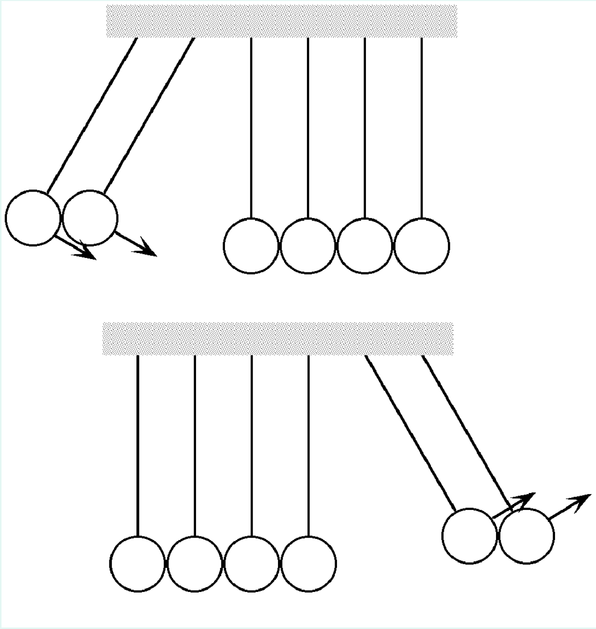


2. Beispiel: Impuls

StudentIn: Impuls ist eine Grösse, die gebraucht wird, um Stossvorgänge zu beschreiben. Sie ist wie Energie eine Erhaltungsgrösse. Es gilt folgende

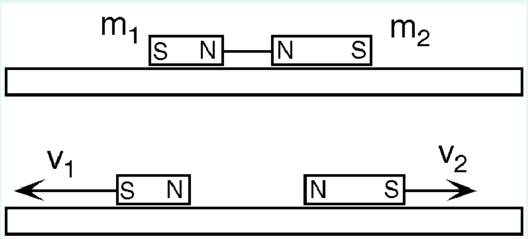
Definition: $\vec{p} = m\vec{v}$

Die ExpertIn führt mit einem advance organizer ins Thema ein:
a) der mariottesche Stossapparat führt vor Augen, dass mit Kraft und Energie nicht alles erklärt werden kann. (Begriff „Schwung“ fällt.)



2. Beispiel ff.

b) die Luftkissenbahn motiviert die Definition/Impulssatz:



$$\textit{Demonstration}: \frac{m_1}{m_2} = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} \Rightarrow$$

$$m_1\upsilon_1 = m_2\upsilon_2 \Rightarrow m_1\vec{\upsilon}_1 = -m_2\vec{\upsilon}_2 \Rightarrow m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = \vec{0}$$

c) Definition: $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$

d) Einheiten legen Verbindung zur Kraft nahe:

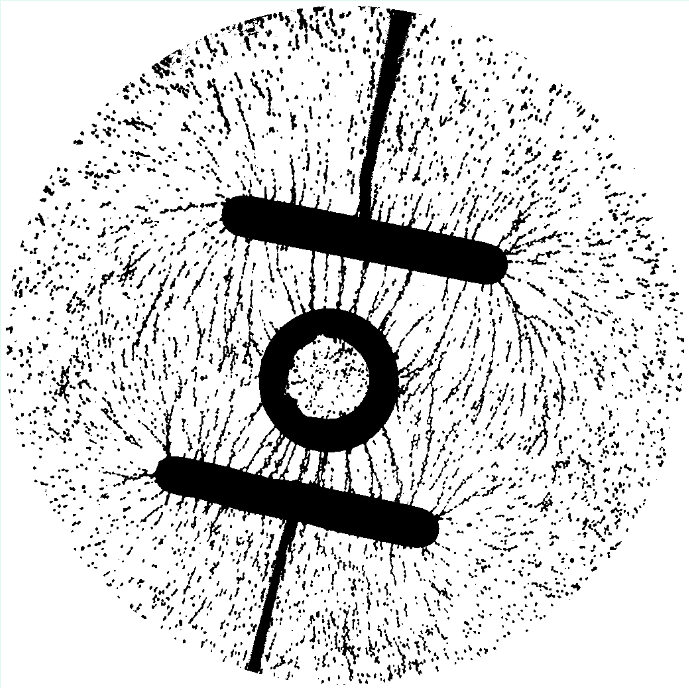
$$[p] = \frac{\mathrm{m \cdot kg}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{m \cdot kg}}{\mathrm{s}^2} \cdot \mathrm{s} = \mathrm{N \cdot s} \Rightarrow F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

3. Beispiel: Faradaykäfig

(Metzler): Die Ladungen eines metallischen Köpers verteilen sich auf der Oberfläche, weil die Ladungen frei beweglich sind und sich abstossen.

ExpertIn: Siehe da!

Eine Erklärung ohne das genaue Kraftgesetz ist unmöglich. Deshalb zeigt man das Phänomen nur experimentell.



Beispiele

Brechungsgesetz

$E = mc^2$ Papierexp.

$E = mc^2$ Aufgabe

Widerstand

Satz von Gauss

Energieflussdichte

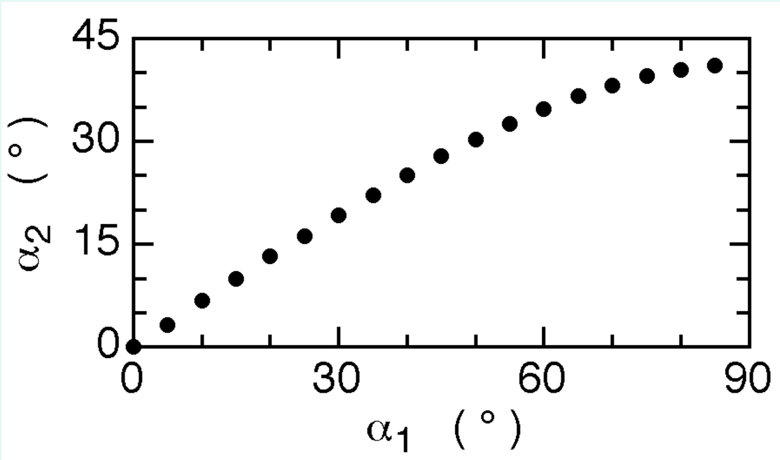
Dimensionsanalyse

Schallgeschwindigkeit aus Daten

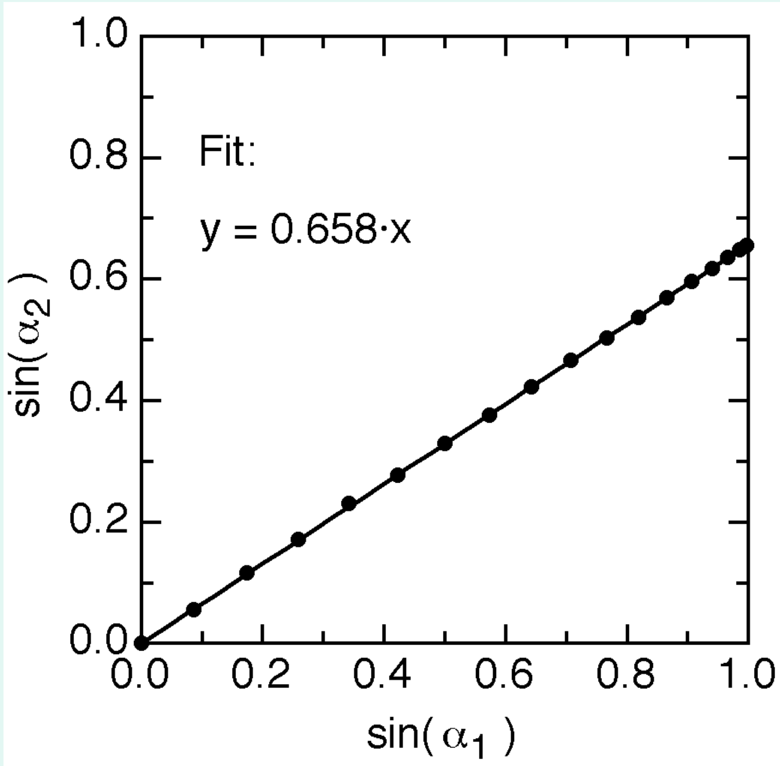
Spannung aus Analogie

Einschaltstrom

Brechungsgesetz: induktive Methode



Wie hängt wohl der Brechungs-
winkel vom Einfallswinkel ab?
Sieht doch aus wie....?



$E = mc^2$: Papierexperiment

Die Beziehung nicht herleiten, die Schüler kennen sie ohnehin, sondern an einem Beispiel testen:

$$^{253}_{99}Es \rightarrow ^{249}_{97}Bk + \alpha$$

Daten:

m(Es-253) = 253.084818(3.4) u

m(Bk-249) = 249.074980(3.4) u

m(He-4) = 4.002603250(1) u, E_α = 6.6327(5) MeV

Mit Δmc^2 erhält man 6.739 MeV, subtrahiert man die Energie des Rückstosskerns, 6.632 MeV

$E = mc^2$: skurrile Aufgabe

Mit einer „schrägen“ Aufgabe von der Herleitung ablenken und den richtigen Gebrauch des Gesetzes unterjubeln:

„Wie viele kg verliert die Erdmasse, wenn sich das Urkilogramm um 1.0 °C erwärmt?“

$$\left.\begin{array}{l} \text{vorher: } m_E = x m_1 \\ \text{nachher: } m_E = (x - \Delta x)\cdot\left(m_1 + \dfrac{\Delta Q}{c^2}\right) \end{array}\right\} \text{ mit } \Delta Q \approx c_{Pt} m_1 \Delta T \text{ folgt}$$

$$\Delta x \approx 8.8\cdot 10^9 \qquad \left(x \approx 6.0\cdot 10^{24}\right)$$

R=U/I: Zu einer Definition überreden

Lehrkraft: Elektrischer Widerstand soll eine Eigenschaft eines elektrischen Elements sein.

Angenommen, Sie schliessen das Element an eine Batterie an. Der Widerstand des Elements steigt. Was passiert dann mit dem elektrischen Strom durch das Gerät?

SchülerIn: Der Strom nimmt ab.

Lehrkraft: Wie kann man das am einfachsten math. fassen?

SchülerIn: Der Widerstand ist umgekehrt prop. zum Strom.

R=U/I: Zu einer Definition überreden ff.

Lehrkraft: Sie möchten konstant 1 A durch ein Element schicken. Nun steigt dessen Widerstand. Wie müssen Sie die Spannung anpassen?
SchülerIn: Je grösser der Widerst. desto grösser die Spannung.
Lehrkraft: Wie wird das am einfachsten math. ausgedrückt?
SchülerIn: Der Widerstand ist direkt prop. zum Spannung.

Lehrkraft: $R \propto \frac{1}{I},\ R \propto U \Rightarrow R \propto \frac{U}{I}$

Wie kann man wohl die Eigenschaft „elektrischer Widerstand“ am einfachsten mathematisch definieren?

SchülerIn: $R = \frac{U}{I}$

Satz von Gauss via Analogie einführen

Lehrkraft: Wie können Sie die Stärke (m^3/s) einer Quelle am Grund eines Bergsees bestimmen?

SchülerIn: Man misst die Querschnittsfläche im Abfluss und die Strömungsgeschwindigkeit.

Lehrkraft: Ja genau: $m^2 \cdot m/s = m^3/s$

Diese Idee wollen wir nun auf die Elektrostatik übertragen:

Ladungen sind die Quellen des Feldes, aus den Ladungen treten Feldlinien wie eine Strömung aus. Der Strömungsgeschwindigkeit entspricht die el. Feldstärke. Damit folgt schon der Satz von Gauss: Feldstärke mal Fläche ist proportional zur von der Fläche eingeschlossenen Ladung.

Nun folgen die Details...

Energieflussdichte: kontrovers anwenden statt begründen

Lehrkraft: Die Energieflussdichte einer em. Welle ist

$J = \frac{1}{2} c \varepsilon \hat{E}^2$ mit Einheit W/m^2

Welche Feldstärkeamplitude erzeugt das Sonnenlicht?

$$\hat{E} = \sqrt{\frac{2J}{c\varepsilon}} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 1.37 \cdot 10^3 \ \mathrm{W/m^2}}{3.0 \cdot 10^8 \ \mathrm{m/s} \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \ \mathrm{As/Vm}}} \approx 1.0 \ \mathrm{kV/m}$$

Diskussion: Anlagegrenzwert Mobilfunk 6 V/m
(kohärent/inkohärent, bekannte Wirkungen, ...)

Schallgeschwindigkeit: Dimensionsanalyse

Lehrkraft/Klasse: ... Die Schallgeschwindigkeit in einem Stab wächst mit steigendem Elastizitätsmodul und sinkt mit wachsender Dichte. ...

Ansatz: $c = E^a \rho^b$

Eine Dimensionsanalyse (Vergleich der Grundeinheiten auf beiden Seiten der Gleichung) liefert drei Bedingungen, die a = 1/2, b = -1/2 und eine unabhängige Kontrolle ergeben.

Diskussion: Welche Varianten wären noch möglich?
Test im Experiment

Schallgeschwindigkeit: Daten betrachten

(....)

Lehrkraft: Die Tabelle zeigt gemessene Schallgeschwindigkeiten von Gasen. Wie hängt c von der Gassorte ab?

Edelgas	He	Ne	Ar	Kr	Xe	Rn
c [m/s]	971	433.4	308	213	170	
M [g/mol]	4.003	20.179	39.948	83.80	131.30	radioaktiv
c^2M/RT	1.66	1.669	1.67	1.67	1.67	

S: Die Schallgeschwindigkeit fällt mit steigender mol. Masse.

$M(Ar){:}M(Ne)=1.98\approx 2 \qquad c(Ne){:}c(Ar)=1.41\approx\sqrt{2}$

Vermutung: $c \propto 1/\sqrt{M}$ Test mit anderen Tabellenwerten

(Varianten: Fit einer Potenzfunktion, graph. Darstellungen)

(....)

Definition Spannung via Analogie motivieren

Lehrkraft: Sie sind im Gemeinderat und möchten Feuerwehrspritzen evaluieren. Auf welche techn. Grössen achten Sie?...

Analogie (Gleichnis)

Wasserpumpe	Ladungspumpe (..)
Volumen ΔV	Ladungsmenge q
Druck(spannung) p	elektrische Spannung U
Arbeit $W = p \cdot \Delta V$	Arbeit $W = U \cdot q$

Die Analogie legt $U = W/q$ nahe, deshalb definieren wir:

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q}$$

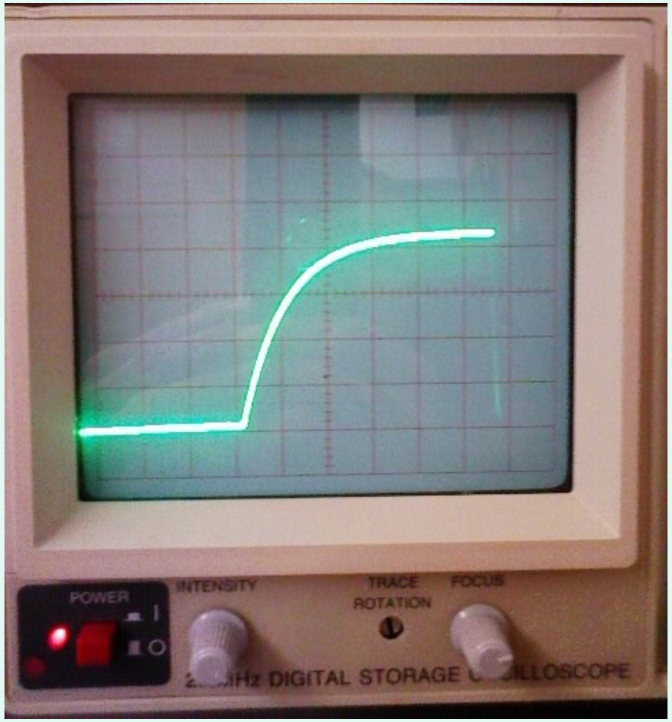
(nun folgen die Details...)

Einschaltstrom durch Spule: Phänomenologie

Zuerst das Phänomen zur Kenntnis nehmen und den Verlauf mathematisch beschreiben.

Vermutung:

$$i(t) = i_\infty - i_\infty \exp\left(-t/\tau\right)$$



später nachschlagen, motivieren oder herleiten:

$$\tau = L/R$$

Zusammenfassung

Induktive und heuristische Methoden gehören zum professionellen Rüstzeug jeder Lehrkraft.

„Handwaving“-Begründungen werden goutiert, falls sie klar als solche deklariert sind und ein Rückgrat aus z.B. interessanten Anwendungen erhalten. Eine kurze Heuristik ist physikalisch durchsichtiger als eine lange Deduktion.

Definitionen gehören nicht an den Anfang eines Kapitels, sondern ans Ende einer Einführung.

Diskussion

-weitere Beispiele

-...

Energie via Analogie motivieren

Analogie (Gleichnis)

Physik	Buchhaltung
Energie	Vermögen
-Bewegungsenergie	-Portokasse
-Lageenergie	-Immobilienkonto
-chemische Energie	-Edelmetallkonto
-weitere Energieformen	-weitere Konti
Arbeit	Bareinzahlungen
Wärme	Bankgiro
weitere Uebertragungsformen	weitere Kontoüberträge

Beispiel: Carnot

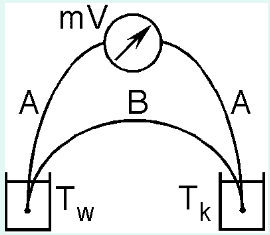
Herleitung des thermodynamischen Wirkungsgrades
mit dem Raketenmotor

$$\left.\begin{aligned} Brennkammer: \; & Q_w = N \cdot \tfrac{3}{2} k T_w \\ Abgas-Strahl: \; & Q_k = N \cdot \tfrac{3}{2} k T_k \end{aligned}\right\} \Rightarrow \eta = \frac{Q_w - Q_k}{Q_w} = \frac{T_w - T_k}{T_w}$$

Problem: Das ist keine Herleitung, sondern eine Motivation.
Die Schwierigkeiten werden vor den Schülern verborgen.

Beispiel Carnot ff.

Variante: explizite Heuristik mit Diskussion und Anwendung



Thermoelement / Thermoelektrischer Generator

Demonstration: $U \propto \Delta T$

Ratespiel: $\eta \propto \Delta T \rightarrow \eta = \Delta T \rightarrow \eta = \frac{\Delta T}{T} \rightarrow \eta = \frac{T_w - T_k}{T_w}$

Alternative(n): $\eta = \left(\frac{T_w - T_k}{T_w} \right)^2$ .... Autorität fragen: FoTa

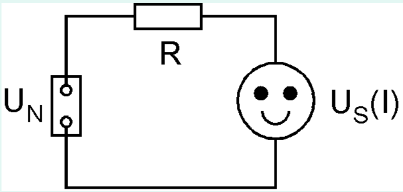
Anwendung: Solarzelle

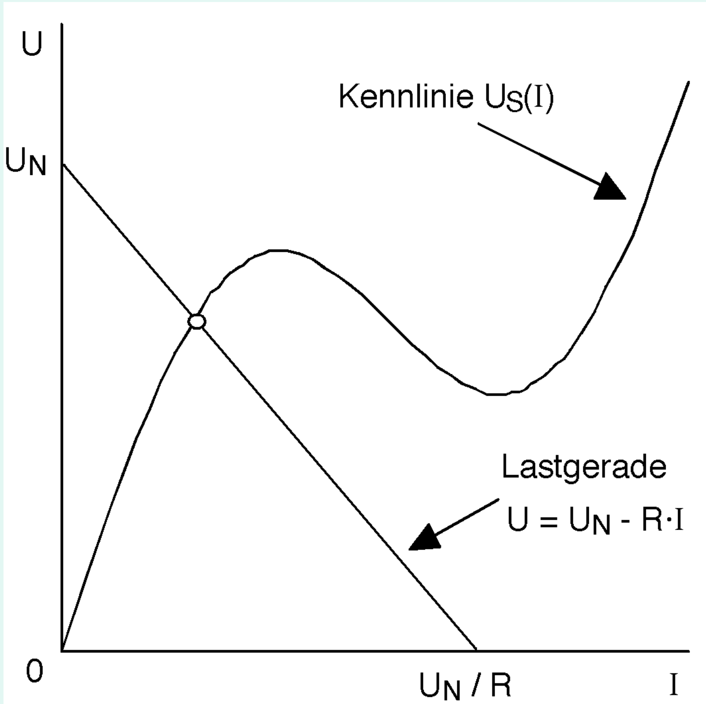
$$\eta = \frac{T_w - T_k}{T_w} = \frac{5778\ \text{K} - 293\ \text{K}}{5778\ \text{K}} = 95\%$$

(AJP 61(9) p821: >93%)

Nicht-ohmscher Widerstand

Wie geht man vor, wenn man nicht rechnen kann?
Man arbeitet mit Diagrammen (hier Kennlinie).





Kirchhoff gilt auch für nicht-ohmsche Elemente:

$$U_N - R \cdot I - U_S = 0$$

$$\underbrace{U_N - R \cdot I}_{Lastgerade} = \underbrace{U_S(I)}_{Kennlinie}$$

Zentripetalbeschleunigung via Einheiten

Bei einer gleichmässigen Kreisbewegung ist die Beschleunigung um so grösser, je höher die Bahngeschwindigkeit und je kleiner der Radius ist.

Ansatz: $$a_z = \frac{v^\alpha}{r^\beta}$$

Der Vergleich der Einheiten liefert $\alpha = 2$ und $\beta = 1$.

Die Formelsammlung zeigt, dass kein Zahlenfaktor fehlt.