Relativer Kepler

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

1 Einleitung

“Die Gravitationskraft zwischen Sonne und Erde ist gleich groß wie die Zentrifugalkraft der Erde auf ihrer (näherungsweisen) Kreisbahn um die Sonne”
“Zentrifugalkraft, die bei einer Bewegung entlang einer Kreisbahn auftretende Scheinkraft F_z [N], die den bewegten Körper aus der Kreisbahn heraus nach außen ablenkt”
“Um Newtons Ableitung des Gesetzes nachzuvollziehen, machen wir die Näherung, dass sich die Planeten auf Kreisbahnen bewegen. Dann wirkt auf einen Planeten die Zentrifugalkraft [..] Damit der Planet auf seiner Bahn bleibt, müssen sich die Zentrifugalkraft und die Anziehungskraft der Sonne gerade ausgleichen.”

Die oben wiedergegebenen Textstellen habe ich innerhalb von fünf Minuten im Internet gefunden. Sie sind didaktisch hoch problematisch, denn es werden zwei Betrachtungsweisen vermischt: jene im Inertialsystem und jene in einem rotierenden Bezugsystem. Der Wechsel des Standpunkts wird nicht kenntlich gemacht.

Nach allgemeinem Verständnis ist die Zentrifugalkraft eine Scheinkraft, die in einem rotierenden Bezugsystem auftritt. Was passiert denn, wenn ein Körper in einem rotierenden Bezugsystem eine Kreisbahn beschreibt? Dieser Frage wird im dritten Abschnitt nachgegangen. Zuerst wollen wir die Frage etwas verallgemeinern: Was passiert, wenn wir eine keplersche Ellipsenbahn in ein rotierendes Bezugsystem transformieren?

2 Planetenbewegung im rotierenden Bezugsystem

Betrachten wir eine Schar von elliptischen Planetenbahnen mit gleicher Umlaufzeit, siehe Abbildung 1.

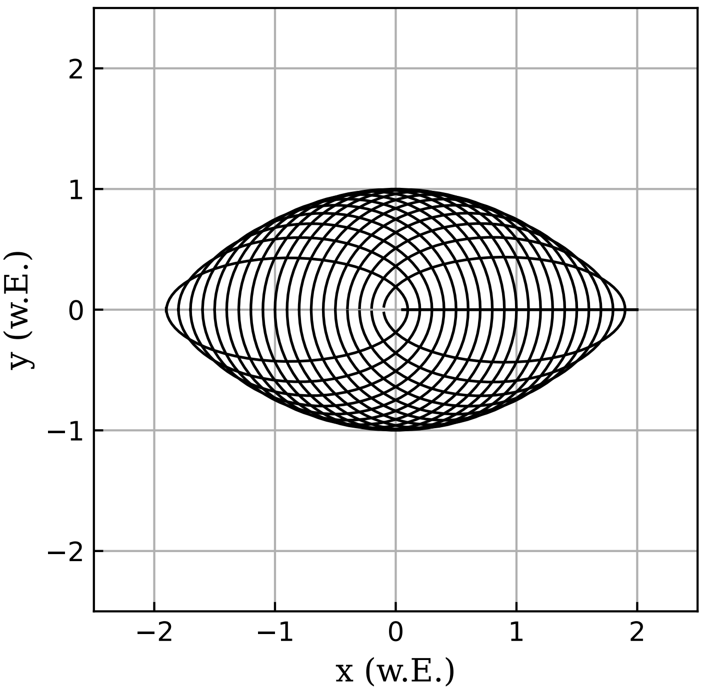


Abbildung 1: Bahnen gleicher Umlaufzeit. Keplersche Bahnellipsen mit gleicher grosser Halbachse a haben die gleiche Umlaufzeit T. Die Sonne mit Masse M befindet sich im Nullpunkt. Der Start für die numerische Integration der Planetenbahnen erfolgt auf der x-Achse rechts vom Nullpunkt nach oben. Die Startorte sind bei $x_0 \in \{0.1a, 0.2a, \ldots, 2a\}$. *Die Startgeschwindigkeit kann mit dem Energiesatz berechnet werden:* $\frac{1}{2}mv_{y0}^2 - GMm/x_0 = -GMm/(2a)$. *Die Simulation erfolgte in willkürlichen Einheiten* ($GM = 1$, $a = 1$). *Die Ellipsen liessen sich auch “exakt” zeichnen, aber im Folgenden werden die zeitlichen Positionen* $x(t)$ *und* $y(t)$ *aus der numerischen Integration ohnehin benötigt.*

Eine der Bahnen in Abbildung 1 ist kreisförmig. Was passiert mit dieser und den anderen Bahnen, wenn wir in ein gleichmässig mitdrehendes Bezugsystem wechseln? Die Drehachse laufe durch die Sonne (im Nullpunkt) und stehe senkrecht auf der Zeichenebene. Die transformierte Ansicht ist in Abbildung 2 zu sehen.

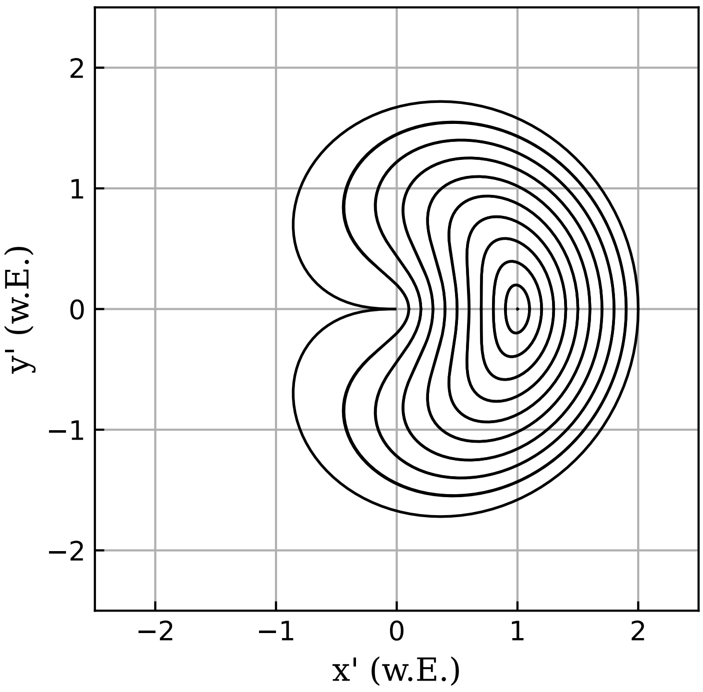


Abbildung 2: Gleiche Bewegungen wie in Abb. 1, aber im gleichmässig mitrotierenden System. Die Kreisbahn schrumpft zu einem Punkt bei (1, 0) zusammen. Die Ellipsenbahnen transformieren sich in geschlossene Kurven. Planeten auf solchen Bahnen bewegen sich also im mitrotierenden System. Wenn sich ein Körper in einem rotierenden Bezugsystem bewegt, müsste neben der Zentrifugalkraft auch eine Corioliskraft wirken.

Der Wechsel in das mitrotierende Bezugsystem ist nur für Kreisbahnen sinnvoll (aber nicht notwendig).

3 Kreisbewegung im rotierenden Bezugsystem

Die Autoren der einleitenden Zitate unterschlagen den Wechsel in das rotierende Bezugsystem (dass sie physikalisch in der Zeit von Huygens, d.h. vor Newton, stecken geblieben sind, will ich jetzt nicht unterstellen). Diesen Wechsel gilt es klar und deutlich herauszustellen. Alles andere ist verwirrender Slang, der im Einführungsunterricht vermieden werden sollte. Am besten verwendet man den relativistischen Dreisprung: 1. Betrachtung im ersten Bezugsystem, 2. Betrachtung im zweiten Bezugsystem, 3. Vergleich der Beobachtungen.

3.1 Beispiel: Der Körper kreist im Inertialsystem

1. Betrachtung im Inertialsystem
Der Planet bewege sich gleichmässig auf einer Kreisbahn um die Sonne. Weil er die Bewegungsrichtung ändert, ist die Bewegung beschleunigt. Weil die Bewegung gleichförmig ist, muss die Beschleunigung normal zur Bahn oder zentripetal gerichtet sein: $a_z = v^2/r = r\omega^2$. Weil der Planet eine Masse m hat, muss diese Beschleunigung durch eine resultierende Kraft F_i verursacht werden. Da wir Bahnstörungen ignorieren, ist die Gravitationskraft $F_G = GMm/r^2$ die einzige, einwirkende Kraft. Wir erhalten aus dem newtonschen Aktionsprinzip:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_i}{m} \rightarrow \frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}$$

2. Betrachtung im gleichmässig mitrotierenden System
Der Planet ist in Ruhe, d.h. die Beschleunigung verschwindet. Die Kräfte auf den Planeten müssen sich also aufheben. Da die Sonne immer noch vorhanden ist, muss ihre Gravitationskraft auf den Planeten durch eine nach aussen wirkende Kraft, die Zentrifugal- oder Fliehkraft, kompensiert werden:

$$ma' = F'_{\mathrm{res}} \rightarrow 0 = F_F - F_G$$

Leider fehlt uns die Möglichkeit, im rotierenden Bezugsystem ein Gesetz für die Fliehkraft F_F herzuleiten.

3. Vergleich der Beobachtungen
Das rotierende Bezugsystem drehe sich gleichmässig mit Winkelgeschwindigkeit Ω relativ zum Inertialsystem um den gemeinsamen Nullpunkt. Die Ortsvektoren im Inertialsystem ($\vec{r}$) und im rotierenden System ($\vec{r}^{\,\prime}$) sind über eine Drehmatrix $\mathbb{D}$ verknüpft.

$$\vec{r}^{\,\prime} = \mathbb{D}\,\vec{r} \qquad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} \cos\Omega t & \sin\Omega t \\ -\sin\Omega t & \cos\Omega t \end{pmatrix}$$
$$\vec{v}^{\,\prime} = \frac{d}{dt}(\mathbb{D}\,\vec{r}) = \frac{d\mathbb{D}}{dt}\,\vec{r} + \mathbb{D}\,\vec{v}$$

Die Geschwindigkeit $\vec{v}^{\,\prime}$ im rotierenden System setzt sich zusammen aus der gedrehten Geschwindigkeit $\vec{v}$ im Inertialsystem und einer konvektiven Geschwindigkeit $\dot{\mathbb{D}}\vec{r}$, die wegen der Rotation hinzukommt.

$$\vec{a}^{\,\prime} = \frac{d\vec{v}^{\,\prime}}{dt} = \frac{d^2\mathbb{D}}{dt^2}\,\vec{r} + 2\,\frac{d\mathbb{D}}{dt}\,\vec{v} + \mathbb{D}\,\vec{a}$$
$$\vec{a}^{\,\prime} = -\Omega^2\,\mathbb{D}\,\vec{r} - 2\,\Omega\begin{pmatrix} \sin\Omega t & -\cos\Omega t \\ \cos\Omega t & \sin\Omega t \end{pmatrix}\vec{v} + \mathbb{D}\,\vec{a}$$
$$\vec{F}^{\,\prime}_{\text{res}}/m = -\Omega^2\,\mathbb{D}\,\vec{r} - 2\,\Omega\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbb{D}\,\vec{v} + \mathbb{D}\,\vec{F}_i/m$$
$$\vec{F}^{\,\prime}_{\text{res}}/m = -\Omega^2\,\mathbb{D}\,\vec{r} - 2\,\Omega\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left(\vec{v}^{\,\prime} - \frac{d\mathbb{D}}{dt}\,\vec{r}\right) + \mathbb{D}\,\vec{F}_i/m = ...$$
$$\vec{F}^{\,\prime}_{\text{res}}/m = +\Omega^2\,\vec{r}^{\,\prime} - 2\,\Omega\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\vec{v}^{\,\prime} + \vec{F}^{\,\prime}_i/m$$

Die Beschleunigung im rotierenden System setzt sich zusammen aus der Zentrifugalbeschleunigung $\Omega^2\vec{r}^{\,\prime}$, der Coriolisbeschleunigung und der transformierten Beschleunigung $\vec{F}^{\,\prime}_i/m$, die durch echte Kräfte verursacht wird. Die Darstellung bezieht sich auf Bewegungen in der Ebene. Im Raum kann folgendes geschrieben werden:

$$\vec{a}^{\,\prime} = -\Omega \times \left(\Omega \times \vec{r}^{\,\prime}\right) - 2\Omega \times \vec{v}^{\,\prime} + m^{-1}\vec{F}^{\,\prime}_i \qquad \text{im Beispiel wäre} \quad \vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)^T$$

Im Unterricht motiviere ich kurz den Ausdruck $F_F = m\Omega^2 r$ im Anschluss an die Kreisbewegung, weil alle Klassen wissen wollen, was es mit der Zentrifugalkraft auf sich hat.

3.2 Beispiel: Ein kräftefreier Körper ruht im Inertialsystem

1. Betrachtung im Inertialsystem
Der Körper sei in Ruhe im Abstand $\vec{r}$ von der späteren Drehachse: $\vec{F}_i = m\vec{a} \rightarrow 0 = 0$

2. Betrachtung im rotierenden Bezugsystem
Das Bezugsystem rotiere mit Winkelgeschwindigkeit Ω relativ zum Inertialsystem; der Körper bewegt sich dann auf einer Kreisbahn mit Winkelgeschwindigkeit $\omega' = -\Omega$ um die Drehachse.

$$m\vec{a}^{\,\prime}_z = \vec{F}^{\,\prime}_i + \vec{F}_F + \vec{F}_C$$
$$-mr\omega'^2 = 0 + mr\Omega^2 - 2m\Omega v' \qquad v' = \omega' r \quad \text{(neg. Vorzeichen für zentripetale Richtung)}$$

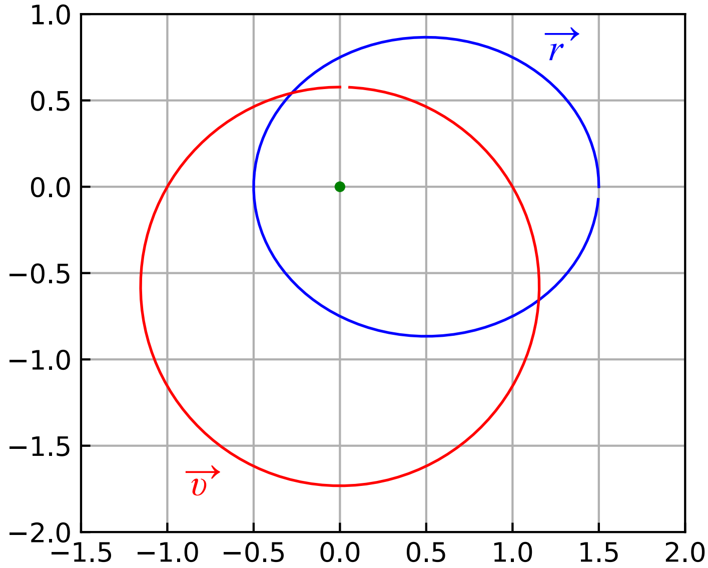
Im rotierenden Bezugsystem muss die Zentripetalbeschleunigung als Kombination aus Zentrifugal- und Coriolisbeschleunigung betrachtet werden. Es ist also nicht möglich, dass "die Zentrifugalkraft die Reaktionskraft auf die Zentripetalkraft" ist, wie man auch gelegentlich liest.

Wer noch nicht genug hat, kann folgende Lernaufgabe durchrechnen: Ein Körper bewege sich mit Winkelgeschwindigkeit ω im Inertialsystem. Wie muss die Bewegung in einem System erklärt werden, das mit $\Omega \neq \omega$ teilweise mitrotiert? Die Aufgabe zeigt, dass die Winkelgeschwindigkeit ω oder ω' des Körpers von der Winkelgeschwindigkeit Ω des Bezugsystems unterschieden werden muss.

4 Geschwindigkeit auf einer Keplerbahn

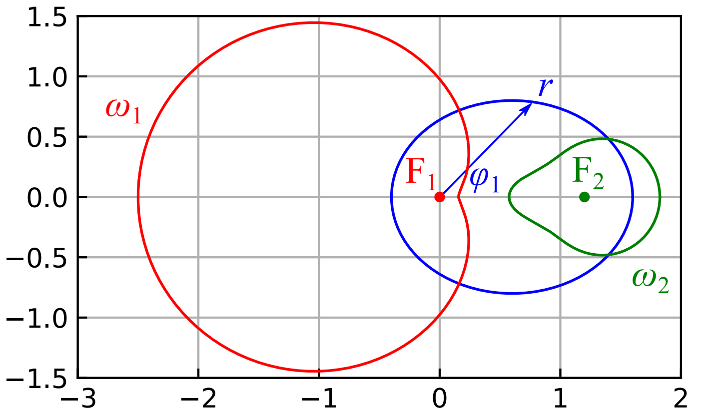
Da ich schon dabei war, habe ich auch noch die momentane Geschwindigkeit auf einer Keplerbahn graphisch dargestellt, siehe Abbildung 3.

Abbildung 3: Hodograph der Ellipsenbahn
Die numerische Simulation einer fast vollständigen Ellipsenbahn ($\vec{r}$, blau) liefert auch die Geschwindigkeitsvektoren $\vec{v} = (v_x(t), v_y(t))^T$. Werden statt der Ortsvektoren $\vec{r}$ die Geschwindigkeitsvektoren abgetragen ($\vec{v}$, rot), so beschreiben die Spitzen der Geschwindigkeitsvektoren eine Kurve, die Hodograph genannt wird. Der Hodograph einer Keplerellipse ist ein exzentrischer Kreis. Die Ellipse startet rechts nach oben, der Hodograph oben nach links.



Die Winkelgeschwindigkeit eines Planeten variiert mit dem Abstand. Das zweite keplersche Gesetz kann nämlich als $dA/dt = \frac{1}{2}r^2\omega$ geschrieben werden. Ein Schüler hatte mal gefragt, ob die Bewegung gleichmässig sei, wenn man sie vom anderen Brennpunkt aus betrachtet. Die Antwort ist nein, siehe Abbildung 4.

Abbildung 4: Winkelgeschwindigkeit
Eine Keplerellipse lässt sich leicht in Polarkoordinaten (r, φ_1) zeichnen, wenn sich der Hauptfokus F_1 mit der Sonne im Pol befindet. In jedem Bahnpunkt lässt sich die momentane Winkelgeschwindigkeit bezüglich F_1 bestimmen und auch in Polarkoordinaten darstellen ($\omega_1(\varphi_1)$, rot). Wie erwartet ist die Winkelgeschwindigkeit im Perihel grösser als im Aphel. Was passiert, wenn man dieselbe Bewegung vom Nebenbrennpunkt F_2 aus betrachtet? Ist die Bewegung dann gleichmässig? Leider verneint die Simulation ($\omega_2(\varphi_2)$, grün) diese Vermutung.



5 Epilog

Die Bilder in diesem Artikel sind in Python programmiert worden. Ich kann nur empfehlen, es selber zu versuchen. Es gibt kostenlose Programmierumgebungen und Tutorials. Programmieren ist je länger je mehr ein Element der allgemeinen Hochschulreife. Es ist gut, wenn wir da auch ein wenig mitreden können.

Ich staune immer wieder, wie schwierig die klassische Mechanik zu sein scheint. Eine Ursache könnte mangelhafte Sorgfalt bei der Einführung der Grundkonzepte sein. Im besseren Fall werden die Formulierungen missverständlich, im schlechteren sind sie sogar falsch. Ein typisches (leider häufiges) Beispiel ist, die “Zentripetalkraft” als “Gegenkraft” der Zentrifugalkraft zu bezeichnen. Hätte man der zentripetalen Komponente der resultierenden Kraft keinen Namen gegeben, würde zumindest diese Fehlvorstellung weniger gefördert.