Wider die Zentripetalkraft

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

1 Einleitung

Huygens (1658) und Newton (1665) haben sich darum verdient gemacht, die Kreisbewegung als beschleunigte Bewegung zu erkennen. Der Ausdruck "Zentripetalkraft" geht auf Newton zurück, der damit einen Fehler von Huygens ("vis centrifuga") korrigierte. Leider hat sich die Zentripetalkraft zur didaktischen Altlast entwickelt – ähnlich der dynamischen Masse in der speziellen Relativitätstheorie – die mehr schadet als nützt. Der Begriff ist zwar nicht völlig falsch, aber unnötig und gibt zu Missverständnissen Anlass. Sätze der Art "Die Zentripetalkraft erzwingt die Kreisbewegung" oder "Bei einer Kreisbewegung zeigt die Kraft stets zum Kreiszentrum" zeigen das Problem auf: Eine Kraft ist nämlich niemals in der Lage, eine Kreisbewegung zu erzwingen. Ein paar Beispiele mögen das zeigen: Für das velofahrende Söhnchen bewegt sich ein Stück Pneu auf einem Kreis, wogegen dasselbe Reifenstück für die still beobachtende Mutter entlang einer Zykloiden läuft. Die Wahl des Bezugsystems ist nicht Teil eines Kraftgesetzes. Ein ebenes Fadenpendel bewegt sich auf einem Kreis, aber weil die Kreisbewegung ungleichmässig ist, zeigt die Kraft fast nie zum Zentrum des Kreisbogens. Die blinde Anwendung von "Kraft = Zentripetalkraft" verdeckt diese Aspekte. Frage ich Lehramtsstudierende, was denn diese Zentripetalkraft eigentlich sei, höre ich meist ausweichende Antworten. Wird sie als Komponente der Resultierenden definiert, provoziert man die Verwechslung mit einer real einwirkenden Kraft, denn schliesslich muss existieren, was einen Namen hat. Ausserdem liesse sich eine Kreisbewegung auch programmieren: Es ist aber deplatziert, Animationen mit Kräften zu erklären.

Man kommt bei der Kreisbewegung nicht umhin, *beide* Seiten in $\vec{F}_{\text{res}}/m = \vec{a}$ zu betrachten, d.h. Dynamik (Kräfte, Masse) *und* Kinematik (Beschleunigung, Geometrie im gewählten Bezugsystem, Startwerte). Dazu ist es nützlich, die Kinematik der krummlinigen Bewegung, d.h. nicht nur der Kreisbahn, zu studieren. So lernt man, welche der Begriffe aus der Kreisbewegung verallgemeinerbar sind und welche lediglich spezielle Situationen beschreiben. So werden die Grundkonzepte der Kreisbewegung viel klarer herausgeschält.

Im nächsten Abschnitt werde ich die Kinematik der krummlinigen Bahnen vorstellen und danach zeigen, wie ich das im Unterricht umsetze. Im fünften Abschnitt möchte ich zwei schwierigere Beispiel durchrechnen.

2 Mathematischer Hintergrund

Theoretische Kinematik ist nichts anderes als Geometrie in speziellen Koordinaten. Sei $\vec{r}(s)$ eine mathematische Kurve in gewöhnlichen, kartesischen Koordinaten, die durch ihre Bogenlänge s parametrisiert ist. Jean Frédéric Frenet (1847) und Joseph Serret (1851) fanden unter anderem, dass folgende Beziehung[4] gilt:

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{\vec{n}}{\rho} \tag{1}$$

Die zweite Ableitung des Ortsvektors $\vec{r}$ nach der Bogenlänge s der Bahnkurve ist gleich dem Quotienten aus Hauptnormalenvektor $\vec{n}$ und Krümmungsradius ρ. Die Beziehung lässt sich an einer Kreislinie nachrechnen:

$$\vec{r} = \rho \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \rho \cdot \begin{pmatrix} \cos s/\rho \\ \sin s/\rho \end{pmatrix} \qquad \rho = \left|\vec{r}\right| = r \qquad \varphi = s/\rho \tag{2}$$

wobei die Bogenlänge $s = \rho\varphi = r\varphi$ der Länge des Kreisbogens entspricht. Die erste Ableitung ergibt den Tangenten-Einheitsvektor $\vec{\tau}$, die zweite Ableitung den skalierten Hauptnormalenvektor $\vec{n}$ des Kreises:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \begin{pmatrix} -\sin s/\rho \\ \cos s/\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} = \vec{\tau} \qquad \vec{\tau} \perp \vec{r} \tag{3}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} -\cos s/\rho \\ -\sin s/\rho \end{pmatrix} = \frac{-1}{\rho}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \frac{\vec{n}}{\rho} \qquad \vec{n} = -\frac{\vec{r}}{r} \tag{4}$$

Diese Beziehungen bleiben erhalten, wenn wir die Kreislinie im Raum drehen oder verschieben. Ist die Kurve kein Kreis, so gelten diese Beziehungen für den Schmiege- oder Krümmungskreis, denn dieser stimmt per Definition in der ersten und zweiten Ableitung mit der Kurve im betrachteten Bahnpunkt überein.

Die Frenet-Serret-Formel wird kinematisch, wenn die Bogenlänge s von der Zeit t abhängt:

$$s = s(t) \qquad \frac{ds}{dt} = \upsilon = \left|\vec{\upsilon}\right| \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d\upsilon}{dt} = a_B \tag{5}$$

Die erste Ableitung der Bogenlänge nach der Zeit ergibt die Bahngeschwindigkeit oder Schnelligkeit υ, die zweite Ableitung die Bahnbeschleunigung a_B. Nun müssen wir die Frenet-Serret-Formel in diese Koordinaten transformieren. Dazu benötigen wir nur die Kettenregel:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \vec{\upsilon}\cdot\frac{1}{\upsilon} = \vec{\tau} \tag{6}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon}\right)\cdot\frac{dt}{ds} = \left(\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot\frac{1}{\upsilon} - \frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon^2}\cdot\frac{d\upsilon}{dt}\right)\cdot\frac{1}{\upsilon} \stackrel{!}{=} \frac{\vec{n}}{\rho} \Rightarrow \tag{7}$$

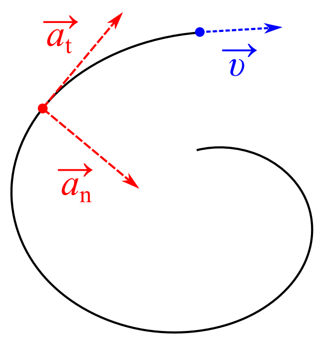
$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{\upsilon^2}{\rho}\cdot\vec{n} + \frac{d\upsilon}{dt}\cdot\frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon} = \frac{\upsilon^2}{\rho}\cdot\vec{n} + \frac{d\upsilon}{dt}\cdot\vec{\tau} = \vec{a}_n + \vec{a}_t = \vec{a} \tag{8}$$

Wir erhalten so die Zerlegung[1] der Beschleunigung $\vec{a}$ in normale ($\vec{a}_n$) und tangentiale ($\vec{a}_t$) Komponenten. Die Bahn- oder Tangentialbeschleunigung $\vec{a}_t$ verändert nur die Schnelligkeit, die Normalbeschleunigung $\vec{a}_n$ verändert nur die Richtung der Bewegung. Die Beziehung $a_n = \upsilon^2/\rho$ ist rein kinematisch!

3 Grundgesetz der krummlinigen Dynamik

Jüngere Schülerinnen und Schüler sind mit Differentialgeometrie natürlich überfordert. Der Einstieg nach Abbildung 1 über die Dynamik krummliniger Bewegungen hat sich bei mir bewährt. Ich thematisiere die Kreisbewegung nach der Kinematik der geradlinig beschleunigten Bewegung, nach der Einführung in die Kräftelehre und auch nach dem Kapitel Arbeit/Energie.

Abbildung 1: Der Schwerpunkt eines Körpers folge einer krummlinigen Bahn. Der momentane Geschwindigkeitsvektor $\vec{\upsilon}$ ist in jedem Bahnpunkt tangential zur Bahn, denn die Geschwindigkeit zeigt ja die Bewegungsrichtung an. Die krummlinige Bewegung ist beschleunigt, weil die Geschwindigkeit (Richtung!) ändert. Der Beschleunigungsvektor darf bei jedem Bahnpunkt in eine normale ($\vec{a}_n$) und eine tangentiale ($\vec{a}_t$) Komponente zerlegt werden.



Die Zerlegung des Beschleunigungsvektors nach Abbildung 1 kann im Grundgesetz der Mechanik (zweites newtonsches Axiom, Aktionsprinzip) verwendet werden:

$$\boxed{\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}_n + m\vec{a}_t} \tag{9}$$

Diese Zerlegung ist recht praktisch, denn sie ordnet verschiedenen Komponenten der Beschleunigung respektive der resultierenden Kraft unterscheidbare Effekte auf die Bewegung zu: Die Tangentialkomponente $m\vec{a}_t$ der Resultierenden macht den Körper schneller oder langsamer, hat aber keinen Einfluss auf die Bewegungsrichtung. Die Normalkomponente $m\vec{a}_n$ verändert offensichtlich die Bewegungsrichtung, lässt aber die Schnelligkeit (Bahngeschwindigkeit) konstant. Dies sieht man daran, dass die senkrechte Komponente der resultierenden Kraft keine Arbeit verrichtet und somit die kinetische Energie konstant lässt.

4 Unterrichtsablauf

Nach der Vorbemerkung zu Kräften bei krummlinigen Bewegungen folgen die kinematischen Beziehungen der *gleichmässigen* Kreisbewegung, damit wir bei konkreten Aufgaben auf *beiden* Seiten des Grundgesetzes (9) etwas einzusetzen haben. Die Einführung ist Standard, deshalb seien die Begriffe und Resultate nur kurz aufgelistet: Umlaufzeit T, Frequenz $f = 1/T$ in Hertz, Winkelgeschwindigkeit $\omega = \Delta\varphi/\Delta t = 2\pi f = 2\pi/T$ in Radiant pro Sekunde, Bahngeschwindigkeit (Schnelligkeit) $v = r\omega$, momentane Geschwindigkeit $\vec{v}(t) \perp \vec{r}(t)$ und Zentripetalbeschleunigung $a_z = v^2/r$ respektive $\vec{a}_n = -\vec{r}(t)\cdot\omega^2$. Bei der *gleichmässigen* Kreisbewegung hat die Beschleunigung nur eine normale (zentripetale) Komponente. Die tangentiale Komponente verschwindet, weil der betrachtete Punkt gleich schnell bleibt. Das Adjektiv "zentripetal" ist hier noch sinnvoll, weil das Zentrum der Kreisbahn und/oder der Bahnradius bekannt sind.

Nach einigen Anwendungsbeispielen zur Kinematik folgen Beispiele zur Dynamik der gleichmässigen Kreisbewegung, damit die Schülerinnen und Schüler sehen, wie die Grundgleichung (9) verwendet wird. Ein Einstiegsbeispiel wäre das Kurvenfahren, ein klassisch-mittelschweres das Kegelpendel, siehe Abbildung 2.

1. Beispiel: Ein Auto von 985 kg fährt mit konstant 20 m/s durch eine horizontale Kurve mit 180 m Radius auf trockener Asphaltstrasse. a) Berechnen Sie die resultierende Kraft auf das Auto.
b) Aus welchen Kräften setzt sich die Resultierende zusammen?

$$\text{a) } \vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}_n + \cancel{m\vec{a}_t} \qquad \text{Die Bewegung ist } \textit{gleichmässig}\text{: } a_t = 0 \tag{10}$$

$$F_{\text{res}} = ma_n = \frac{mv^2}{r} = \frac{985\,\text{kg}\cdot(20\,\text{m/s})^2}{180\,\text{m}} = \underline{\underline{2.2\,\text{kN}}} \tag{11}$$

$$\text{b) } \vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_G + \vec{F}_N + \vec{F}_R \overset{\text{hier}}{=\!=} \vec{F}_R \qquad \text{Gewichts-, Normal- und Reibungskraft} \tag{12}$$

2. Beispiel siehe Abb. 2.

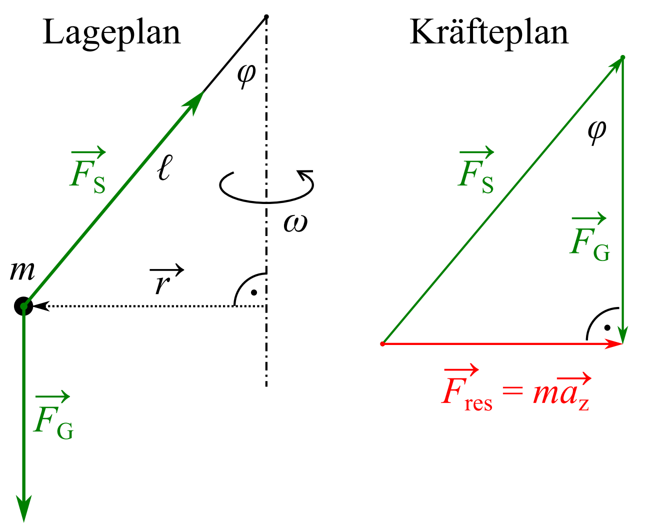


Abbildung 2: Kegelpendel
Ein Fadenpendel der Länge ℓ und Masse m wird gleichmässig mit Winkelgeschwindigkeit ω auf einem horizontalen Kreis mit Radius r herum bewegt. Der Faden schliesst den Winkel φ mit der Vertikalen ein.
Wie gross ist φ als Funktion von ω?
Im Lageplan (free body diagram) zeichnen wir das stilisierte Pendel mit den einwirkenden Kräften (Schnurkraft F_S und Gewichtskraft F_G); im Kräfteplan setzen wir die einwirkenden Kräfte vektoriell zur Resultierenden F_{res} zusammen, von der wir wegen der Zentripetalbedingung die Richtung kennen.

2. Beispiel: Kegelpendel (Fortsetzung, siehe Abbildung 2)

$\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}_n + \cancel{m\vec{a}_t}$	Die Bewegung des Kegelpendels ist *gleichmässig:* $a_t = 0$	(13)
$\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}_z = -m\omega^2\vec{r}$	Kreisbahn: Die Beschleunigung ist zentripetal: $-\vec{r} \parallel \vec{F}_{\text{res}}$	(14)
$F_G \tan\varphi = m\omega^2 r$	Das Kräftedreieck bestimmt die Resultierende.	(15)
$mg\tan\varphi = m\omega^2\ell\sin\varphi$	Die Geometrie bestimmt den Radius.	(16)
$\left(\frac{g}{\cos\varphi} - \omega^2\ell\right)\cdot\sin\varphi = 0$	Die Gleichung hat eine oder zwei Lösungen für $0 \leqslant \varphi < \pi/2$.	(17)

5 Schrauben- und Ellipsenbahn

Beispiel Helix: Ein geladenes Teilchen bewegt sich im homogenen Magnetfeld in der Regel auf einer Schraubenlinie. Nur in bestimmten Bezugsystemen respektive bei speziellen Startbedingungen resultiert eine gleichmässige Kreisbewegung. Schauen wir mal den Fall an, wo sich das Teilchen auf einer Schraubenbahn bewegt:

$\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}_n + \cancel{m\vec{a}_t}$	Die Bewegung bleibt *gleich schnell:* $a_t = 0$	(18)
$q\cdot\vec{v}\times\vec{B} = m\vec{a}_n$	Die magnetische Kraft ist parallel zur Normalbeschleunigung.	(19)
$qvB\sin\alpha = mv^2/\rho$	Zwischenwinkel $\alpha = \angle\vec{v}\,\vec{B} \qquad (q > 0)$	(20)
$\rho = \frac{mv}{qB\sin\alpha}$	Krümmungsradius der Schraubenbahn	(21)

Zerlegen wir den Geschwindigkeitsvektor in Komponenten $\vec{v}_\parallel = \left(\vec{v}\cdot\vec{B}\right)\cdot\vec{B}/B^2$ parallel sowie $\vec{v}_\perp = \vec{v} - \vec{v}_\parallel = -(\vec{v}\times\vec{B})\times\vec{B}/B^2$ senkrecht zu $\vec{B}$ und wechseln wir in ein Bezugsystem, das sich mit $\vec{v}_\parallel$ bewegt, so erhalten wir den altbekannten Fall einer Kreisbahn mit Larmor- oder Zyklotronradius $r_Z = mv_\perp/(qB)$. Im ursprünglichen Bezugssystem setzt sich die Bewegung aus einer gleichmässigen Kreisbewegung mit Bahngeschwindigkeit $v_\perp = v\sin\alpha$ senkrecht sowie einer gleichförmigen Bewegung mit $v_\parallel = v\cos\alpha$ parallel zu den Feldlinien zusammen. Die Bahn ist dann eine Schraubenlinie. Wie hängen der Zyklotronradius r_Z im speziellen Fall und der Krümmungsradius ρ der Schraubenlinie im allgemeinen Fall zusammen?

$$r_Z = \frac{mv_\perp}{qB} = \frac{mv\sin\alpha}{qB} = \frac{mv}{qB\sin\alpha}\sin^2\alpha = \rho\sin^2\alpha \tag{22}$$

Der Krümmungsradius ρ der Schraubenbahn ($0 < \alpha < \pi/2$) ist grösser als der Zyklotronradius r_Z der Kreisbahn ($\alpha = \pi/2$). Die Hauptnormalenvektoren der Schrauben- respektive Kreisbahn sind aber parallel. Der geometrische Ort aller Krümmungsmittelpunkte (Evolute) ist eine zur Schraubenbahn "ähnliche" Schraubenlinie mit anderem Radius und gleicher Ganghöhe. Die Bezeichnung "zentripetal" verliert ihren unmittelbaren Nutzen, weil das Krümmungskreiszentrum in jedem Bahnpunkt anderswo liegt.

Beispiel Ellipse: Man sagt, die Planeten umkreisen die Sonne. Die Bahn ist aber kein Kreis, sondern in besserer Näherung eine Ellipse. Wo herum kreisen die Planeten dann?
Wir betrachten eine elliptische Bahn mit grosser Halbachse a und kleiner Halbachse b respektive numerischer Exzentrizität $\varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ und Halbparameter $p = b^2/a$ (Abb. 3). Der Planet mit Masse m wird nur durch die Gravitationskraft F_G der Sonne (Masse M) beschleunigt. Die lokale Beschleunigung $\vec{g}$ ist dann

$m\vec{g}_n + m\vec{g}_t = \vec{F}_{\text{res}} = -\frac{GMm}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$	newtonsche Gravitationskraft	(23)
$-\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$	Energieerhaltungssatz	(24)
$\vec{r} = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$	Ellipse parametrisiert durch den Polarwinkel φ	(25)

Um das Zentrum des Schmiegekreises an die Ellipse im Punkt (r, φ) zu bestimmen, gehen wir so vor:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \quad \text{unnormierter Tangentenvektor} \tag{26}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{\tau} \quad \text{unnormierter Hauptnormalenvektor} \tag{27}$$

$$v^2 = \frac{2GM}{r} - \frac{GM}{a} \quad \text{Schnelligkeit via Energiesatz} \tag{28}$$

$$\vec{g}_n = \frac{\vec{g} \cdot \vec{n}}{n} \cdot \frac{\vec{n}}{n} \quad \text{Normalbeschleunigung} \tag{29}$$

$$\rho = \frac{v^2}{g_n} = .. = \left(2 - \frac{r}{a}\right) \cdot n \quad \text{Krümmungskreisradius} \tag{30}$$

$$\vec{r}_E = \vec{r} + \left(2 - \frac{r}{a}\right) \cdot \vec{n} \quad \text{Schmiegekreiszentrum auf der Evolute} \tag{31}$$

Der geometrische Ort aller Schmiegekreismittelpunkte einer Kurve heisst Evolute. Die Evolute einer Ellipse[2] ist eine schiefe Astroide, d.h. eine Astroide mit ungleichen Achsen, siehe Abbildung 3. Auf der unteren Hälfte ist eine solche Astroide über die nach dem oben skizzierten Algorithmus gezeichnete Evolute gelegt.

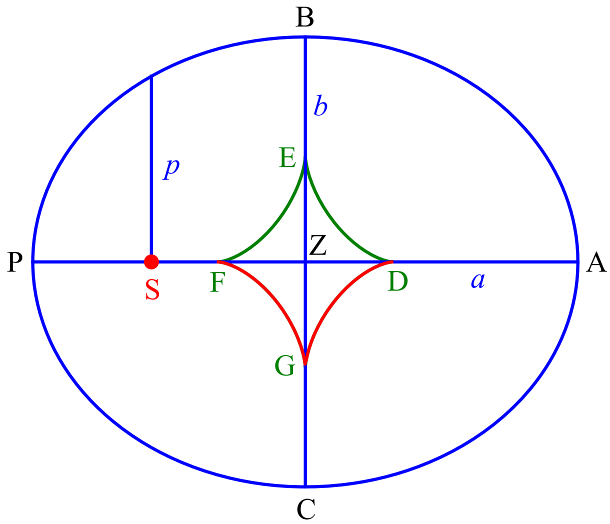


Abbildung 3: Massstäbliche Bahn des Planetoiden (887) Alinda mit $a = 2.4842\,\mathrm{au}$ und $\varepsilon = 0.5647$ sowie der geometrische Ort aller Krümmungsmittelpunkte (Evolute, hier die schiefe Astroide DEFG). Die Sonne S befindet sich in einem Brennpunkt der Ellipse.

Der Krümmungsradius in den Hauptscheiteln (Aphel A, Perihel P) ist gerade der Parameter $p = b^2/a$, in den Nebenscheiteln B und C beträgt er $\rho = a^2/b$. Die Astroide (Lamé-Kurve) hat folgende Darstellung, falls man den Nullpunkt ins Ellipsenzentrum Z verlegt:

$$\left|\frac{x}{a-p}\right|^{2/3} + \left|\frac{y}{b - a^2/b}\right|^{2/3} = 1 \tag{32}$$

6 Schluss

Die Dynamik der gleichmässigen Kreisbewegung ist eine Anwendung von $\vec{F}_{\text{res}}/m = \vec{a}_n + \vec{a}_t$ bei der die Tangentialbeschleunigung $\vec{a}_t$ verschwindet und die Geometrie oder Kinematik die Richtung sowie ev. den Betrag der Normalbeschleunigung $\vec{a}_n$ festlegt. Diese Darstellung ist nicht neu, aber sie scheint etwas in Vergessenheit geraten zu sein. Die ”Zentripetalkraft” stört, denn sie wird oft mit einer einwirkenden Kraft verwechselt und lässt sich nicht leicht auf krummlinige Bahnen oder ungleichmässige Kreisbewegungen verallgemeinern.[3] Streichen Sie den Begriff aus Ihrem Aktivwortschatz und verwenden Sie “Zentripetalbeschleunigung” oder “Zentripetalbedingung”, wenn Sie bei gleichmässigen Kreisbewegungen ein ähnliches Schlüsselwort verwenden wollen. Die Zentrifugalkraft taucht nicht auf, falls wir Inertialsysteme verwenden.

---

[1] DMK/DPK/DCK, “Formeln - Tabellen - Begriffe”, Orell Füssli Verlag, 7. Auflage, Seite 156

[2] `https://mathworld.wolfram.com/EllipseEvolute.html` (23. Juli 2021)

[3] Läuchli/Müller, “Physik Aufgaben”, Orell Füssli Verlag, 12. Auflage (1987), Seite 114, Aufgabe 421*

[4] `https://de.wikipedia.org/wiki/Frenetsche_Formeln` (5. Sept. 2021)