Überlichtgeschwindigkeit

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

1 Einleitung

“Nichts ist schneller als das Licht.” Diesen Satz haben Sie sicher schon gehört oder gelesen, sogar meine Schülerinnen und Schüler kennen ihn. Nichtsdestotrotz ist er falsch, sogar wikipedia[1] kennt Ausnahmen. Die Geschwindigkeitsbegrenzung gilt für Materie, Strahlung und Information, aber nicht für alle messbaren Vorgänge. Ein bekanntes Beispiel ist der Leuchtturm: Wenn sich der Lichtkegel dreht, kann der beleuchtete Fleck Überlichtgeschwindigkeit erreichen, wenn nur die beleuchtete Fläche weit genug entfernt ist, z.B. auf dem Mond. Die Bewegung dieses Flecks kann videographiert und anschliessend ausgemessen werden, erfüllt also die gängigen Bedingungen der Objektivierbarkeit. Leider kann man damit nichts anfangen, Kommunikation mit Überlichtgeschwindigkeit ist nicht möglich.

Das nächste Beispiel zeigt, dass Überlichtgeschwindigkeit mit der speziellen Relativitätstheorie kompatibel ist, denn sie erfüllt sogar das Gesetz der Geschwindigkeitstransformation.

2 Antennenarray

Eine Reihe gekoppelter Antennen empfange eine elektromagnetische Welle von einem weit entfernten Quasar, siehe Abbildung 1. Die Radiowelle sei eben und monochromatisch: $e(x, y, t) = \hat{e}\cos(k_x x + k_y y - \omega t)$.

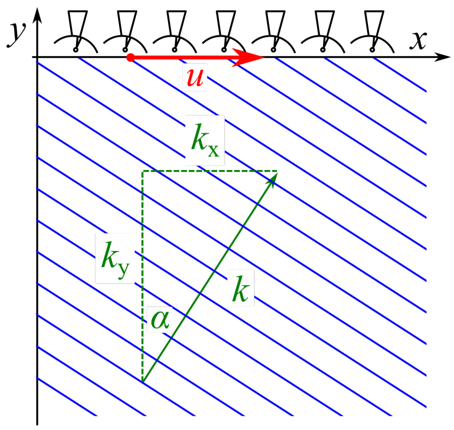

Abbildung 1: Ein Array aus Radioantennen empfängt eine ebene Welle. Die Welle habe den Wellenvektor $\vec{k} = (k_x, k_y)$, wobei $|\vec{k}| = k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ ist. Weiter stellen λ die Wellenlänge, ω die Kreisfrequenz und c die Lichtgeschwindigkeit dar. Der Einfallswinkel α ist durch den Wellenvektor bestimmt: $\sin\alpha = k_x/k$. Wir dürfen zweidimensional rechnen. Betrachten wir eine einzelne Wellenfront, z.B. ein bestimmtes Maximum: Der Wellenberg bewegt sich mit “Phasengeschwindigkeit” u über den Antennenarray. Diese Geschwindigkeit ist objektiv messbar und sie ist grösser als die Lichtgeschwindigkeit.

Mit den Bezeichnungen in Abbildung 1 folgt für die Phase eines Maximums auf der x-Achse ($y = 0$)

$$k_x x + k_y \cdot 0 - \omega t \overset{\text{z.B.}}{=} 2\pi \Rightarrow x = \frac{\omega t}{k_x} + \frac{2\pi}{k_x} \leftrightarrow x = ut + x_0 \Rightarrow u = \frac{\omega}{k_x} = \frac{\omega}{k\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\alpha} > c \qquad (1)$$

Nun wollen wir schauen, was mit dieser Phasengeschwindigkeit u passiert, wenn wir in ein Bezugsystem transformieren, das sich mit Geschwindigkeit $-v$ entlang der x-Achse bewegt. Wir wissen, dass sich dabei die Frequenz (Dopplereffekt) und die Richtung (Aberration) der Welle ändern. Zum Glück ist die Phase der Welle eine relativistische Invariante, denn eine (z.B.) Nullstelle bleibt eine Nullstelle unter einer Lorentztransformation.

Also gilt für die momentane Phase der Welle in zwei verschiedenen Inertialsystemen:

$$k_x x + k_y y - \omega t = k'_x x' + k'_y y' - \omega' t' \tag{2}$$

$$= k'_x \gamma (x + \upsilon t) + k'_y y - \omega' \gamma \left(t + \frac{\upsilon}{c^2} x \right) \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} \tag{3}$$

Da x, y und t unabhängig sind, dürfen wir sie paarweise Null setzen und die Koeffizienten vergleichen:

$$t = 0, x \neq 0, y = 0 \rightarrow \qquad k_x = k'_x \gamma - \omega' \gamma \frac{\upsilon}{c^2} \tag{4}$$

$$t = 0, x = 0, y \neq 0 \rightarrow \qquad k_y = k'_y \tag{5}$$

$$t \neq 0, x = 0, y = 0 \rightarrow \qquad \omega = -k'_x \gamma \upsilon + \omega' \gamma \tag{6}$$

Die gleichen Beziehungen müssen gelten, wenn wir die Rücktransformation machen und dabei gestrichene Grössen mit ungestrichenen und $-\upsilon$ mit $+\upsilon$ ersetzen.

$$k'_x = \gamma \left(k_x + \omega \frac{\upsilon}{c^2} \right) \qquad k'_y = k_y \qquad \omega' = \gamma (\omega + k_x \upsilon) \tag{7}$$

Verwenden wir noch die Beziehung $c = \omega/k = \omega'/k'$, $\sin\alpha = k_x/k$ und $\sin\alpha' = k'_x/k'$, so folgt

$$\omega' = ck' = \gamma (ck + k_x \upsilon) \Rightarrow \qquad k' = \gamma k (1 + \sin\alpha \cdot \upsilon/c) \tag{8}$$

$$k'_x = \gamma \left(k_x + \omega\upsilon/c^2 \right) = \gamma (k_x + k\upsilon/c) \Rightarrow \qquad \sin\alpha' = \frac{k'_x}{k'} = \frac{\gamma (k_x + k\upsilon/c)}{\gamma k (1 + \sin\alpha \cdot \upsilon/c)} = \frac{\sin\alpha + \upsilon/c}{1 + \sin\alpha \cdot \upsilon/c} \tag{9}$$

Wie gross ist nun die "Phasengeschwindigkeit" u' der Wellenberge entlang der x'-Achse im neuen System?

$$\sin\alpha = \frac{c}{u} \rightarrow \qquad u' = \frac{c}{\sin\alpha'} = \frac{c (1 + \sin\alpha \cdot \upsilon/c)}{\sin\alpha + \upsilon/c} = \frac{c (1 + c/u \cdot \upsilon/c)}{c/u + \upsilon/c} = \frac{u + \upsilon}{1 + \frac{u\upsilon}{c^2}} \tag{10}$$

Die letzte Gleichung ist das übliche, eindimensionale Geschwindigkeitstransformationsgesetz, das auch für subluminare Bewegungen gilt.

3 Diskussion

Wir sehen also, dass Überlichtgeschwindigkeit nicht nur objektiv messbar ist, sondern dass sie sich auch wie jede andere Geschwindigkeit transformiert. Allerdings ist es nicht möglich, durch eine Lorentztransformation eine Über- in eine Unterlichtgeschwindigkeit zu verwandeln.

Wenn ich mit Relativitätstheorie anfange, gebe ich meist ein qualitatives Beispiel mit Überlichtgeschwindigkeit zum Besten. Die Schülerinnen und Schüler freut's und mich auch. Wir lernen, einfach anzufangen und bei Bedarf zu präzisieren. Die Ergänzung erfolgt mündlich oder schriftlich.

In der speziellen Relativitätstheorie gibt es viele didaktische Mythen und Altlasten. Ein Beispiel für eine Altlast ist die dynamische Masse: Sie zerstört die wertvolle Idee, dass Masse eine Eigenschaft eines Körpers ist. Sie spart keine Arbeit, denn man muss jedesmal notieren, ob die dynamische oder Ruhemasse gemeint ist. Sie weckt die Fehlvorstellung, dass $F = ma$ immer wahr ist, wenn man die dynamische Masse einsetzt.
Ein Mythos ist, dass das Michelson-Morley Experiment wichtig sei für die Relativitätstheorie. Einstein hat es in seien berühmten Arbeiten von 1905 jedenfalls nicht zitiert. Bereits 1910 ist die Relativitätstheorie aus den Fängen der Elektrodynamik befreit worden, sie gilt allgemeiner. Ergäbe das Michelson-Morley-Experiment ein positives Resultat, so wäre die Relativitätstheorie nicht tot. Hingegen könnte das Photon z.B. eine Masse haben (analog dem Neutrino). Das c in $E = mc^2$ wäre unverändert, aber verschieden von der Lichtgeschwindigkeit.

[1] `https://de.wikipedia.org/wiki/Überlichtgeschwindigkeit` (Abruf am 5. März 2022)