Spiralspulen

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, 8001 Zürich

Einleitung

Wie stark ist das Magnetfeld im Zentrum einer Flachspule, deren Leiter die Form einer Spirale hat? Die Berechnung der magnetischen Feldstärke ist eine hübsche Abwechslung gegenüber der immergleichen Kreis- oder Zylinderspule. Archimedische Spiralen werden gelegentlich in Platinen geätzt.

Theorie

Unter "Spirale" will ich hier eine ebene Kurve verstehen, welche einfach und sinnvoll durch eine Funktion $r(\varphi)$ in Polarkoordinaten beschrieben werden kann. Der Strom fliesse entlang der Spirale. Die Felder der Zu- und Ableitungen werden ignoriert. Mit dem Biot-Savart Gesetz lässt sich die magnetische Feldstärke im Zentrum (Nullpunkt des Koordinatensystems) berechnen:

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Die Feldstärke im Nullpunkt ist senkrecht zur Spiralenebene (z-Richtung) gerichtet. Das negative Vorzeichen steht deshalb da, weil $\vec{r}$ die Gegenrichtung zur üblichen Definition im Gesetz hat. Das vom Strom I durchflossene Spiralenstück $d\vec{l} = (dx,\ dy,\ 0)$ kann aus der Spiralenfunktion $\vec{r}(\varphi) = (x,\ y,\ 0)$ berechnet werden. Damit folgt für die z-Komponente der Feldstärke:

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\varphi}{r} \qquad B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{r}$$

Archimedische Spirale

Das Kreuz in den folgenden Abbildungen bezeichnet jeweils den Koordinatenursprung (Nullpunkt), wo die magnetische Feldstärke berechnet wird.

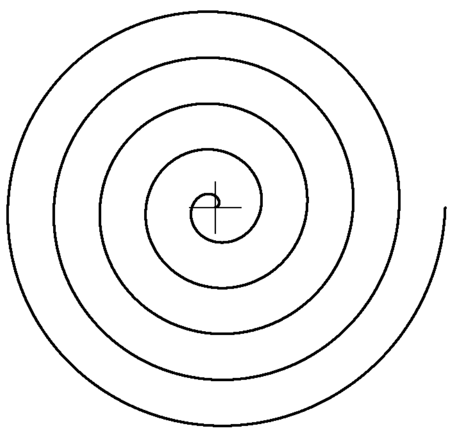

Abb. 1: Archimedische Spirale

$$r(\varphi) = a\varphi$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{\varphi}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\ln\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)$$

Dieser Ausdruck ist nur definiert, falls $\varphi_1 > 0$.

Von der Archimedischen Spirale zur runden Flachspule

Aus der Formel für die Feldstärke im Zentrum einer Archimedischen Spirale sollte sich der Ausdruck für die Feldstärke in der Mitte einer Kreisspule gewinnen lassen.

Aus $r_1 = a\varphi_1$ sowie $r_2 = a\varphi_2$ und $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi N$ folgt

$$r_2 - r_1 = a(\varphi_2 - \varphi_1) = a \cdot 2\pi N \Rightarrow a = \frac{r_2 - r_1}{2\pi N}$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \ln\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) = \frac{\mu_0 I N}{2 \cdot (r_2 - r_1)} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$ Mit $r_1 = r$ und $r_2 = r + \varepsilon$ folgt:

$$B_z = \frac{\mu_0 I \cdot N}{2 \cdot \varepsilon} \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right) = \frac{\mu_0 I \cdot N}{2 \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{r} + ..\right) = \frac{\mu_0 I N}{2r} + ..$$

Der letzte Ausdruck beschreibt in erster Ordnung die Feldstärke einer Kreisspule.

Weitere "Spiralen"

Ellipse, Parabel und Hyperbel werden formal durch dieselbe Funktion beschrieben, somit genügt es, wenn wir z.B. die Ellipse betrachten.

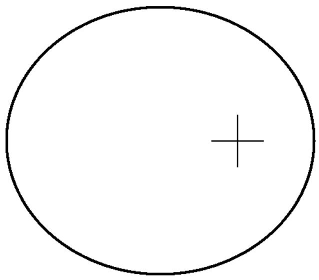

Abb. 2: "fokussierte" Ellipse

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \quad \text{mit } 0 \le \varepsilon < 1$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{(1 + \varepsilon\cos\varphi)d\varphi}{p} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{2\pi}{p}$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2p} \qquad \text{(Kreis: r = p)}$$

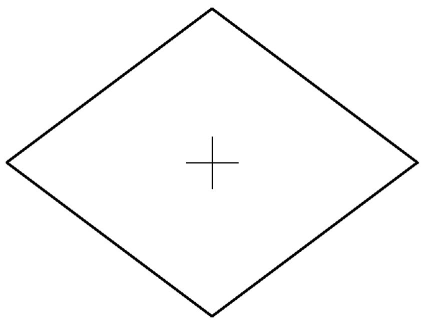

Abb. 3: Lamé-Kurve

$$r(\varphi) = \left(\left|\frac{\cos\varphi}{a}\right|^n + \left|\frac{\sin\varphi}{b}\right|^n\right)^{-1/n} \quad \text{(Abb. für n = 1)}$$

a und b sind die "Halbachsen". Für n = 1 gilt:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos\varphi}{a} + \frac{\sin\varphi}{b}\right) d\varphi$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

Im Zentrum einer quadratischen Leiterschleife (Rahmenspule) mit Kantenlänge s und Diagonale d hat die Feldstärke den Wert:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{\mu_0 I}{\pi} \cdot \left(\frac{2}{d} + \frac{2}{d}\right) = \frac{\mu_0 I}{\pi} \cdot \frac{4}{d} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}s} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{s}$$

Natürlich konnte ich mich dann nicht mehr bremsen und habe alle möglichen Funktionen durchprobiert. Wer möchte, kann eine Langversion dieses Artikels auf www.dpk.ch/Material anschauen.

Martin Lieberherr, 8. Mai 2009