

Abstand zum Mars mit einer Kleinbildkamera

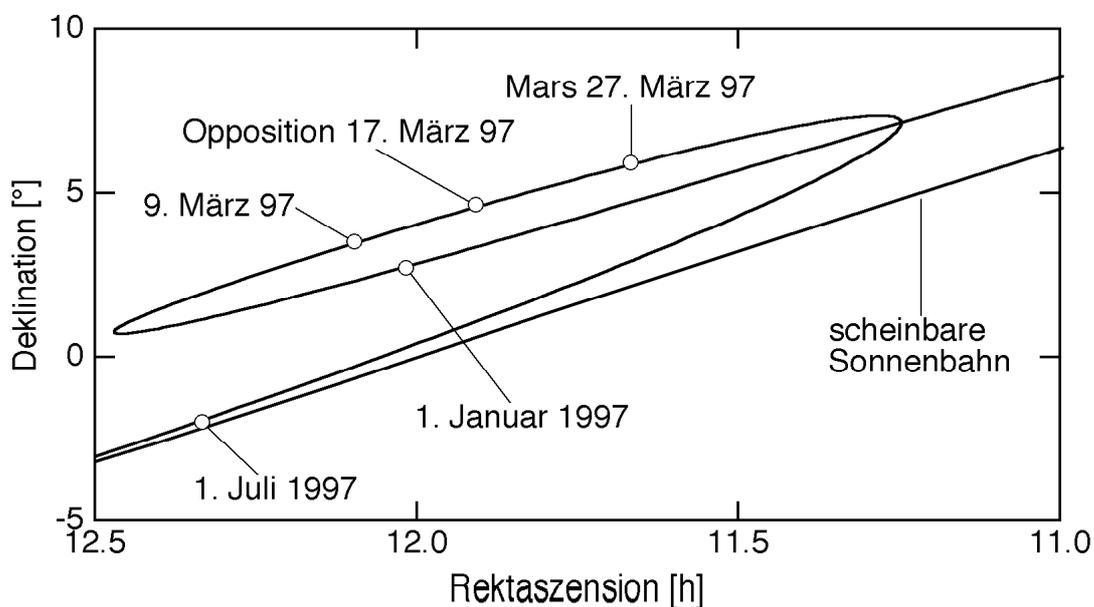
Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, 8001 Zürich, 26. Aug. 1997

Einleitung

Anfang März 1997 las ich zufällig einen Artikel [1] über die Bestimmung der Entfernung Erde-Saturn durch Parallaxmessung mit einer Kleinbildkamera. Da ich gerade einen Freifachkurs über Astronomie hielt, wollte ich den Inhalt des Artikels für eine Lektion aufbereiten. Ich versuchte, aus den abgedruckten Fotografien den Parallaxwinkel des Saturn zu bestimmen. Das Resultat hat mich aber nicht überzeugt und im Artikel wird das Ergebnis leider auch nicht mitgeteilt. Zufälligerweise las ich in [2], dass der Mars im Lauf des März in Opposition zur Erde stehen wird, und so entschloss ich mich, die Methode auf ihn anzuwenden.

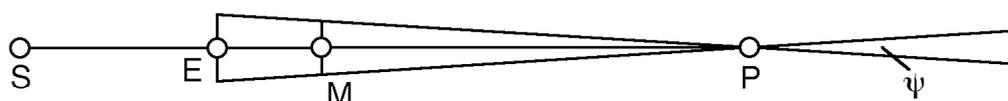
Theorie

Zum Zeitpunkt der Opposition überholt die Erde den Mars auf der Innenbahn, deshalb bewegt sich der Mars dann scheinbar rückwärts auf seiner Bahn (Fig. 1). Der Mars beschreibt eine Schlaufe in den Sternbildern Jungfrau und Löwe. Wenige Tage vor und nach der Opposition bewegt sich der Mars mit konstanter scheinbarer Winkelgeschwindigkeit.



Figur 1: Die Bahn des Mars um den Zeitpunkt der Opposition nach [2] und [4]. Die drei speziell markierten Positionen im März entsprechen jenen meiner Aufnahmen.

Zum Zeitpunkt der Opposition stehen Sonne, Erde und Mars etwa in einer Linie. Man darf annehmen, dass sich Erde und Mars in derselben Ebene bewegen, denn die Marsbahn ist nur $1^\circ 51'$ gegen die Ekliptik geneigt [3]. Die ekliptikale Breite des Mars zum Zeitpunkt der Opposition ist etwa 3.6° [2], d.h. auch für einen Beobachter auf der Erde stimmt die obige Annahme recht gut. Die zweite Annahme ist, dass sich Erde und Mars mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten auf Kreisbahnen um die Sonne bewegen. Sie vereinfacht die Rechnung wesentlich, ist aber auch gefährlich, da die Exzentrizität der Marsbahn ziemlich gross ist.



Figur 2: Schaufigur von Sonne (S), Erde (E), Mars (M) und Parallaxwinkel ψ . Der Zeitraum umfasst je zehn Tage vor und nach der Opposition, was etwa meinen Aufnahmen entspricht.

Gesucht ist der Abstand $d = \overline{EM}$ von Erde und Mars (Figur 2). Sei $r_E = \overline{SE}$ der Radius der Erdbahn, $r_M = \overline{SM} = r_E + d$ der Radius der Marsbahn, ω_E die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Bahnbewegung der Erde um die Sonne, ω_M jene des Mars und ψ der beobachtete Parallaxwinkel, der durch die Relativbewegung von Erde und Mars während der Zeit t erzeugt wird. In dieser Zeit legt die Erde die Strecke $b_E \approx r_E \omega_E t$ und der Mars die Strecke $b_M \approx r_M \omega_M t$ zurück. Der gesuchte Abstand ist $d = \overline{EP} - \overline{MP} \approx b_E / \omega_E - b_M / \omega_M$, da $\tan \psi \approx \psi$ für die betrachteten kleinen Parallaxwinkel. Aus den obengenannten Beziehungen erhält man:

$$d = r_E \frac{\omega_E \omega_M}{\omega_E - \omega_M}$$

Die Winkelgeschwindigkeiten ω_E und ω_M lassen sich aus den siderischen Umlaufzeiten berechnen: $\omega = 2\pi/T$ resp. $360^\circ/T$.

Zwischenbemerkung: Verwendet man obenstehende Formel für d , so muss man die siderische Umlaufzeit des Mars in einem Tabellenwerk nachschlagen. In [1] wird das vermieden, indem die Umlaufzeit des Mars mit Hilfe des dritten Keplerschen Gesetzes durch jene der Erde und den Erdbahnradius ausgedrückt wird. Dies kompliziert die Herleitung der Schlussgleichung für den Marsabstand, bringt aber meiner Meinung nach keinen Vorteil. Die Bestimmung der Umlaufzeit des Mars aus Beobachtungen ist für Schüler einfacher nachzuvollziehen als der experimentelle Nachweis der Gültigkeit des dritten Keplerschen Gesetzes. Man könnte dabei so vorgehen: In [2] werden die Daten der Marsoppositionen angegeben. Die in Tab. 1 wiedergegebenen Oppositionen sind über den ganzen Tierkreis verteilt. Der Durchschnitt der Abstände aufeinanderfolgender Oppositionen nach der Tabelle ist 781.2 d. Dies ist bereits eine gute Schätzung für die synodische

Umlaufzeit $T_S = 779.94$ d [3]. Aus ihr und der Erdumlaufszeit $T_E = 365.256$ d lässt sich die Marsumlaufszeit T_M bestimmen: $1/T_S = 1/T_E - 1/T_M$ woraus $T_M = 686.98$ d folgt. (Ende der Zwischenbemerkung)

Datum	d [Mio. km]	Δt [Tage]
7. 1. 1993	94	
12. 2. 1995	101	766
17. 3. 1997	99	764
24. 4. 1999	87	768
13. 6. 2001	67	781
28. 8. 2003	56	806
7. 11. 2005	69	802

Tabelle 1: Daten der Marsoppositionen und der jeweiligen Abstände von der Erde nach [2]. Δt ist der Abstand zur vorangehenden Opposition in Tagen.

Experiment

An den wenigen klaren Abenden im März fotografierte ich den Mars aus meinem Schlafzimmerfenster heraus. Ich verwendete eine Kleinbildkamera mit 200 ASA Farbdiafilm und ein 50 mm/ B 1.8 - Objektiv. Ich achtete darauf, den Planeten etwa in der Mitte des Suchers zu sehen, und belichtete etwa zehn Sekunden ab Stativ ohne Nachführung. Die Aufnahmen erfolgten kurz nach dem Ende der Dämmerung etwa um 21 Uhr. Um später die Winkel auf den Dias abschätzen und allfällige starke Bildverzerrungen erkennen zu können, zeichnete ich auf meine Schulwandtafel ein Raster aus Quadraten mit 10 cm Kantenlänge und fotografierte dieses aus 2.8 m Entfernung (alternativ könnte man einen Massstab fotografieren). Ich liess die Aufnahmen ohne Rahmung entwickeln, um zu verhindern, dass mir dunkle Dias zerschnitten werden. Damit ich einen Anhaltspunkt zum Ansetzen der Schere zum Zerschneiden des Films vor der Rahmung hatte, füllte ich nicht den ganzen Film mit nachtschwarzen Bildern, sondern fotografierte zwischendurch auch mal etwas bei Tageslicht. Auf den Dias waren, trotz aufgehelltem Nachthimmel in Zürich-Oerlikon, mehr Sterne sichtbar als von blossem Auge. Ich klebte ein Papier ans Glas meiner Balkontür, projizierte das erste Dia darauf und markierte die Position des Mars und einiger heller Sterne in seiner Nachbarschaft. Die nächsten Dias projizierte ich so, dass die Nachbarsterne mit den entsprechenden Markierungen auf dem Papier übereinstimmten. So konnte ich die späteren Positionen des Mars relativ zum Sternhintergrund einzeichnen. Eine Kopie dieses Bildes finden Sie am Schluss dieses Artikels (Figur 3). Die Ringlein an den Marspositionen bezeichnen die Grösse des belichteten Bereichs. Zum Schluss projizierte ich den Raster und hielt ihn im gleichen Bild fest. In [1] wurde die Strecke s , um die sich das Abbild des Planeten auf dem photographischen Negativ verschoben hatte, unter dem Mikroskop vermessen. Daraus bestimmte man über die Brennweite f des Objektivs den

Parallaxwinkel $\varpi = s/f$. Diesem Vorgehen traue ich nicht, denn ich habe kein Gefühl für die Genauigkeit der Brennweite.

Die Höhe des Rasterauschnitts in Figur 3 ist 12.15 cm. In Wirklichkeit war es 0.5 m hoch und wurde aus 2.8 m Entfernung fotografiert. Damit ergibt sich der Massstab $(0.5 \text{ m} / 2.8 \text{ m}) \cdot (360^\circ/2^\circ) / 12.15 \text{ cm} = 0.842 \text{ }^\circ/\text{cm}$. Der Massstab lässt sich auch aus der Breite des Rasters und den Diagonalen bestimmen. Ich verwendete den Mittelwert $0.846 \text{ }^\circ/\text{cm}$. Der Mars bewegt sich auf dem Bild vom 9. bis 17. März 3.45 cm, vom 17. bis zum 27. März 4.3 cm. Damit erhält man die Winkelgeschwindigkeiten $0.365 \text{ }^\circ/\text{d}$ resp. $0.364 \text{ }^\circ/\text{d}$. Man sieht, dass sich der Mars etwa mit konstanter scheinbarer Winkelgeschwindigkeit bewegt. Im folgenden verwendete ich den Mittelwert $\varpi/t = 0.364 \text{ }^\circ/\text{d}$. Berechnet man damit und mit Werten aus [3] den Marsabstand, so erhält man:

$$d = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ m} \frac{\frac{360^\circ}{0.365 \cdot 256} + \frac{360^\circ}{0.364 \cdot 256}}{0.364 \cdot 256} = 0.520 \text{ AE} = 78 \text{ Mio. km}$$

Vergleicht man dieses Resultat mit jenem in Tab. 1, so sieht man, dass wir zu tief liegen. Betrachtet man Tabelle 1 genauer, so sieht man auch, warum das so ist: Von allen eingetragenen Marsabständen ist der diesjährige der zweitgrösste, der Mars steht anscheinend in der Nähe seines sonnenfernsten Punktes. Tatsächlich hat er Ende Januar sein Aphel passiert [2]. Die wirkliche Winkelgeschwindigkeit, mit der sich Mars am 17. März um die Sonne bewegt hat, ist kleiner als seine mittlere. Man kann nun obige Rechnung verfeinern, indem man annimmt, dass sich der Mars gerade in seinem Aphel befindet. Mit Hilfe des zweiten Keplerschen Gesetzes kann man die Winkelgeschwindigkeit ϖ_A des Mars im Aphel ausdrücken durch die mittlere Winkelgeschwindigkeit ϖ_M und die numerische Exzentrizität [3] seiner Bahnellipse $e = 0.093377$. Man erhält:

$$\varpi_A = \varpi_M \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 + e)^2} \approx 0.833 \varpi_M$$

Eine entsprechende Korrektur für die Erdbahn lohnt sich nicht, denn die momentane Winkelgeschwindigkeit ist nur etwa 1.1 % grösser als die mittlere. Man erhält damit für den Marsabstand:

$$d_A = r_E \frac{\varpi_E \varpi_A}{\varpi_A^2} = 0.686 \text{ AE} = 103 \text{ Mio. km.}$$

Dieser Wert passt sehr gut zu den 99 Mio. km aus [2].

Um die Genauigkeit der eigenen Parallaxmessung zu kontrollieren, habe ich mit Hilfe eines Computerprogramms [4] einige der Fixsterne im Umfeld des Mars identifiziert und deren Winkelabstände anzeigen lassen. So sind z.B. ϵ -Leo und ι -Leo $7^\circ 20'$ voneinander entfernt, β -Vir und γ -Vir $7^\circ 42'$. Mit diesen und anderen Werten habe ich festgestellt, dass ich die Parallaxwinkel systematisch etwas unterschätzt habe. Die Fehlerschranke der Parallaxwinkelbestimmung dürfte bei etwa 5 % liegen.

Schlussfolgerungen

In meinem Freifachkurs hatte ich nicht allzuviel Zeit zur Verfügung. Ich zeigte den Schülern untenstehendes Bild (Fig. 3) und gab den Winkelabstand ϵ -Leonis zu ι -Leonis an. Daraus konnten sie den Parallaxwinkel bestimmen. Wir berechneten zusammen den Marsabstand in der Näherung zweier Kreisbahnen und diskutierten die Abweichung vom richtigen Resultat.

Der vollständige Versuch eignet sich für eine Semesterarbeit. Allerdings muss in der fraglichen Zeit ein äusserer Planet in Opposition stehen. Hat man wenig Zeit zur Verfügung, könnte man auch versuchen, auf die gleiche Weise den Mondabstand zu bestimmen. Die Aufnahmen dazu können in einer einzigen Nacht gemacht werden.

Quellen

[1] Measuring the Distance to an Outer Planet by Parallax with a Camera, Jonathan Marr, THE PHYSICS TEACHER, VOL. 35, JAN. 1997, p. 34-36

[2] DAS KOSMOS HIMMELSJAHR 1997, Hans-Ulrich Keller, Franckh-Kosmos-Verlag, Stuttgart, 1996

[3] Formeln und Tafeln, DMK/DPK, Orell Füssli Verlag Zürich, 5. Auflage 1992

[4] Voyager, the Interactive Desktop Planetarium, Version 1.0, Carina Software, 1988