Luftige Statistik

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

1 Einleitung

Witze kann ich mir nie merken, aber wenn ich einen lese, kann ich meist schnell sagen, ob ich ihn schon mal gesehen habe. Mit wissenschaftlichen Publikationen geht es mir offenbar ähnlich. Beim Umsetzen meiner Fresszettelsammlung in eine TEX-nisch kohärentere Form konnte ich es natürlich nicht lassen, ab zu zu etwas nachzuforschen. Und prompt traf ich beim Thema "barometrische Höhenformel" auf ein Paper [1], von dem ich ganz sicher war, es vor dreissig Jahren schon mal gelesen zu haben. Aber leider hatte ich wie bei den Witzen die Pointe komplett vergessen. Beschrieben wird die Lösung folgenden Paradoxons:

Eine Luftsäule sei isoliert (adiabatisch) und im thermischen Gleichgewicht. Ist dann die Temperatur in der ganzen Säule gleich oder nimmt sie nach oben ab? Auf diese Frage können zwei sich widersprechende Antworten gegeben werden:

a) Es gibt keinen atmosphärischen Temperaturgradienten, denn im thermodynamischen Gleichgewicht herrscht überall dieselbe Temperatur.

b) Die Temperatur nimmt nach oben ab, weil die potentielle Energie jedes Moleküls zu und die kinetische abnimmt. Weil die Temperatur proportional zur mittleren kinetischen Energie der Moleküle ist, muss die Temperatur nach oben abnehmen.

Antwort b) auf die Frage ist falsch. Wir dürfen für die Begründung annehmen, dass die Luft ein ideales Gas aus wechselwirkungsfreien Teilchen sei. Es stimmt zwar, dass die die kinetische Energie nach $E_k = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - mgz$ nach oben abnimmt, aber das gilt nicht für das Mittel aller Moleküle auf der Höhe z. Die langsamen Moleküle erreichen die Höhe z unter Umständen gar nicht. Das lässt sich direkt mit der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung zeigen. Wir brauchen nur die vertikale Komponente der Geschwindigkeit anzuschauen, die anderen Komponenten sind lediglich Zuschauer (fallen als konstanter Faktor aus der Verteilung heraus).

$$\left.\frac{dN}{d\upsilon_z}\right|_{z=0} = N_0 \cdot \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \cdot \exp\left(-\frac{m\upsilon_0^2}{2kT}\right) = c_0 \exp\left(-\frac{E_k}{kT}\right) \tag{1}$$

$$\left.\frac{dN}{d\upsilon_z}\right|_{z>0} = c_1 \cdot \exp\left(-\frac{\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - mgz}{kT}\right) = \underbrace{c_1 \exp\left(\frac{mgz}{kT}\right)}_{c_2} \cdot \exp\left(-\frac{m\upsilon_0^2}{2kT}\right) \tag{2}$$

Die Verteilung auf der Höhe $z > 0$ ist bis auf einen Faktor c_2/c_0 gleich jener auf Höhe $z = 0$. Wenn die Maxima an derselben Stelle liegen, muss auch die Temperatur gleich sein.

2 Simulation

Da ich ohnehin für einen Versuch zur Statistik radioaktiver Zerfälle meine Excel-Fähigkeiten erweitern wollte, simulierte ich den im vorangehenden Abschnitt dargestellten Vorgang. Ich gab Teilchen mit Maxwell-verteilten Geschwindigkeiten auf Höhe $h = 0$ vor und berechnete die Verteilung der so geworfenen Teilchen auf die Höhen $h > 0$. Der Einfachheit halber nahm ich eine reine Stickstoffatmosphäre (m = 28 u) mit einer Temperatur von 288 K an. Wie in [2] ausgeführt, muss man die eindimensionale, Maxwell'sche Verteilung der Schnelligkeiten ansetzen, um die korrekte Verteilung der Höhen zu erhalten. Hat man ein Teilchen mit einer zufällig generierten Anfangsgeschwindigkeit, so kann man seine Flugdauer (Rückkehrzeit des vertikalen Wurfs) berechnen. In diesem Zeitraum wählt man zufällig einen Zeitpunkt und berechnet dazu die Höhe. Die so simulierten Höhen haben eine statistische Verteilung, die in Abbildung 1 dargestellt ist.

Für die Simulation wurden $N = 10\,000$ Teilchen verwendet. Für das Histogramm wurde eine Klassenbreite von 500 m angesetzt. Die Verteilung kann recht gut als Exponentialfunktion dargestellt werden. In halblogarithmischer Darstellung liegen die simulierten Daten sehr schön auf einer Geraden. Wird eine Exponentialfunktion an die Daten angepasst, so erhält man eine Skalenhöhe von $h_0 = 8.7$ km, also genau dieselbe wie in der barometrischen Höhenformel (3). Die Häufigkeitsverteilung ist ja direkt proportional zum Druck.

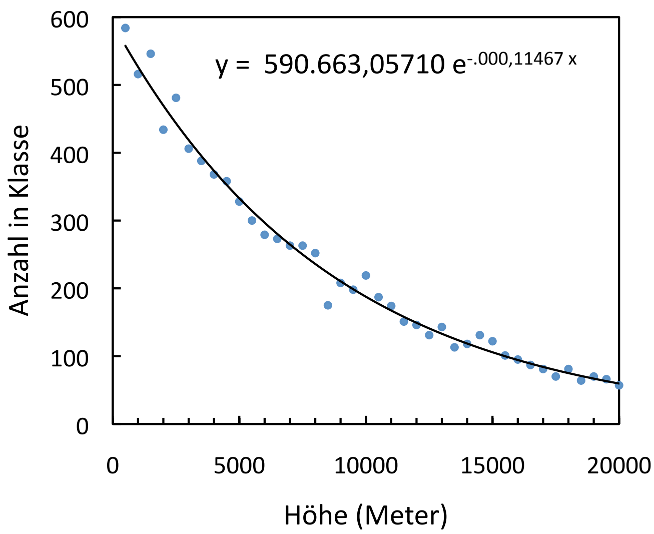


Abbildung 1: Höhenverteilung der Stickstoffmoleküle in der simulierten Atmosphäre
Der Simulation liegen N = 10 000 Teilchen mit Masse 28 u und mittlerer Temperatur 288 K zugrunde. Die simulierte Verteilung entspricht, wie der Druck in der barometrischen Höhenformel, einer Exponentialfunktion. Eine exponentielle Ausgleichsfunktion passt gut.

3 Luftdruck auf Meereshöhe

In der barometrischen Höhenformel

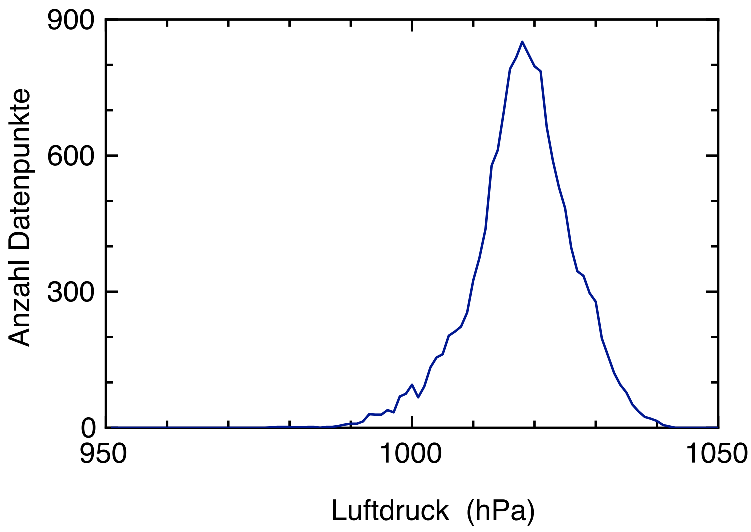
$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g h}{p_0}\right) = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right) = p_0 \exp\left(-\frac{h}{h_0}\right) \tag{3}$$

taucht der Luftdruck p_0 auf der Ausgangshöhe auf. Üblicherweise lasse ich die Schülerinnen und Schüler dort den Normdruck $p_n = 101325$ Pa einsetzen. Rechnet man den Luftdruck auf der Höhe h aus, so liegt das Resultat normalerweise neben den gemessenen Wert, weil der Druck nicht genau exponentiell abnimmt. Die Atmosphäre ist kein thermodynamisch abgeschlossenes System im Gleichgewicht. Auch ist der Luftdruck wetterbedingt meist verschieden vom Normdruck. Und da ich schon immer wissen wollte, wie der Luftdruck auf Meereshöhe schwankt, habe ich mir Daten beschafft und in Abbildung 2 dargestellt. Die Druckmessungen sind nicht normalverteilt, der Mittelwert beträgt in diesem Beispiel 1017 mbar und die Streuung 8.2 mbar.

Abbildung 2: Häufigkeitsverteilung von Luftdruckdaten auf Meereshöhe.

N = 14573 Datenpunkte in 6 h Intervallen auf dem 45. Breitengrad zwischen Februar 2006 und Februar 2016 von NOAA.[3] Die Klassenbreite beträgt 1 hPa.

Der Mittelwert beträgt 1017.49 hPa, die Streuung (Standardabweichung) 8.208 hPa.



Die Luftdrücke an einem bestimmten Ort sind also nicht normalverteilt. Die Verteilung ist links-schief. Der mittlere Luftdruck variiert auch örtlich (äquatoriale Tiefdruckrinne, polares Hoch), weil es die Temperaturen auch tun. Leider konnte mir kein Geograph Auskunft geben, wie bei dieser starken Variabilität der Normdruck p_n festgelegt wurde. Ich werde also p_n weiterhin mittleren Luftdruck auf Meereshöhe nennen müssen, ohne genau zu wissen, wie das Mittel gebildet wurde.

Literatur

[1] C. A. Coombes and H. Laue, "A paradox concerning the temperature distribution of a gas in a gravitational field", Am. J. Phys. **53**(3), March 1985, 272-273

[2] M. N. Berberan-Santos, E. N. Bodunov, L. Pogliani, "On the barometric formula", Am. J. Phys. **65**(5), May 1997, 404-412

[3] http://coastwatch.pfeg.noaa.gov/erddap/griddap/erdlasFnPres6.html (Abruf am 26. Februar 2016)

29. März 2017 , Lie.