Laserschwert und Photonentorpedo

Martin Lieberherr
Mathematisch Naturwissenschaftliches Gymnasium Rämibühl, 8001 Zürich

Einleitung

Aus aktuellem Anlass stellte ich an einer Nachprüfung folgende Aufgabe:
"Darth Vader stösst sein Laserschwert während 37 ms gegen einen feindlichen Roboter. Der Droide hat 41 kg, das Schwert die Klasse 100 MW / 456 nm. (...) Welchen Rückstoss (Δv) erhält der Roboter unter der Annahme, dass er ganz bleibt und das Licht vom Laserschwert schluckt?" Lösung:

$$\Delta v = \frac{p_i}{m_D} = \frac{E}{cm_D} = \frac{P_L t}{cm_D} = \frac{100 \cdot 10^6 \text{ W} \cdot 37 \cdot 10^{-3} \text{ s}}{3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 41 \text{ kg}} = \underline{\underline{0.30 \text{ mm/s}}}$$

Die SchülerInnen kannten den Impuls $p_i = E/c$ eines Photons oder eines Lichtstrahls aus dem Unterricht, die Aufgabe wäre somit einfach gewesen. Die Leistung schätzte ich aus einer Szene im Film Star Wars ab: Dort wurde mit einem Schwerthieb ein Bein abgetrennt. Um eine Scheibe Wasser von 1 cm Dicke und 100 cm^2 Fläche in wenigen Millisekunden zu verdampfen, sind Grössenordnung 100 MW nötig.

Hidden Curriculum

Im Unterricht leite ich den Impuls p_i eines Photons in folgender Weise her:

$$\frac{E}{p_i} = \frac{\gamma mc^2}{\gamma m v} = \frac{\gamma mc^2}{\gamma mc} = c \Rightarrow p_i = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Leider ist beim Photon $\gamma = \infty$ und $m = 0$, ich muss also einen undefinierten Term mit einem undefinierten Term kürzen. Die Schüler lachen mich jedesmal aus! Weil ich das natürlich nicht auf mir sitzen lassen wollte, suchte ich nach einer besseren Herleitung. Das ist aber gar nicht so einfach. Die Beziehung $E^2 = m^2c^4 + p_i^2c^2$ hilft nur scheinbar weiter, denn sie wird üblicherweise für ein materielles Teilchen hergeleitet. Es ist nicht a priori sicher, dass sie auch für masselose Photonen gilt.
Im Unterricht berechne ich den Strahlungsdruck mit Hilfe des Impulses. Fällt Licht senkrecht auf eine Fläche und wird vollständig reflektiert, so ist der Druck p_D:

$$p_D = \frac{F}{A} = \frac{|\Delta \vec{p}|}{\Delta t A} = \frac{|2\vec{p}_i|}{\Delta t A} = \frac{2E}{c \Delta t A} = 2\frac{J}{c}$$

Diese Rechnung kann man umdrehen und aus dem Strahlungsdruck den Impuls der einfallenden Strahlung bestimmen:

$$p_i = \frac{J \Delta t A}{c} = \frac{E}{c}$$

Wenn man den Strahlungsdruck direkt herleiten könnte, hätte ich also eine Lösung meines Problems.

Strahlungsdruck in der klassischen Elektrodynamik

Dass elektromagnetische Strahlung Druck auf eine bestrahlte Fläche ausübt, wurde 1871 von James Clerk Maxwell theoretisch hergeleitet und 1900 von Pjotr Nikolajewitsch Lebedev experimentell nachgewiesen.[1] Fällt eine elektromagnetische Welle auf einen Metallspiegel, so erzeugt der elektrische Feldstärkevektor Ströme im Metall. Der magnetische Feldstärkevektor übt Kräfte auf diese Ströme aus, welche die Ursache des Strahlungsdrucks sind. Die Rechnung ist sicherlich zu hoch für unsere Schüler. Ihr Ergebnis ist $p_D = 2J/c$. Dasselbe Gesetz gilt übrigens auch für Schallwellen.

Strahlungsdruck im Photonenbild

Ein Photonentorpedo der Länge l und Querschnittsfläche A enthalte N Photonen der Frequenz f respektive Gesamtenergie $E = Nhf$. Er treffe ein spiegelndes Raumschiff, das mit Geschwindigkeit v flieht. Bei der Reflexion tritt Dopplereffekt auf: Die Frequenz der Photonen und damit deren Energie vermindert sich. Der Dopplereffekt bei Reflexion an einem bewegten Spiegel ist in erster Ordnung:

$$\frac{\Delta f}{f} \approx 2\frac{v}{c}$$

Damit ist der Energieverlust des Torpedos bei senkrechter Reflexion:

$$\Delta E = Nh\Delta f = \frac{2Nhfv}{c} = \frac{2Ev}{c}$$

Der Photonentorpedo erbringt mechanische Leistung während der Reflexion:

$$P = F \cdot v \;||\; \frac{\Delta E}{\Delta t} = p_D A v \;||\; \frac{2Ev}{\Delta t c} = p_D A v \;||\; p_D = \frac{2E}{A \Delta t c} = \frac{2J}{c}$$

Somit haben wir den Strahlungsdruck hergeleitet, ohne die dynamische Masse des Photons zu verwenden. Die Herleitung ist genügend einfach, dass sie von Schülern nachvollzogen werden kann.

Strahlungsdruck in der Relativitätstheorie

Darth Vader übe das Zustechen mit dem Laserschwert vor dem Spiegel. Wir betrachten den Vorgang im Ruhesystem des Spiegels respektive des Schwerts.

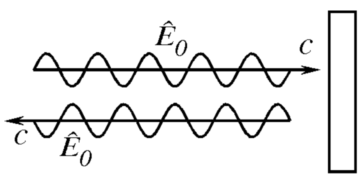

Abbildung 1: Der Spiegel ist in Ruhe. Die einfallende und die reflektierte elektromagnetische Welle haben dieselbe Amplitude $\hat{E}_0$. Die Welle falle senkrecht auf den Spiegel.

Sei $\hat{E}_0$ die Amplitude der elektrischen Feldstärke einer ebenen, monochromatischen, elektromagnetischen Welle im Vakuum (Abb. 1). Die Amplitude des magnetischen Felds ist proportional dazu: $\hat{E}_0 = c\hat{B}_0$. Elektrische und magnetische Feldstärkevektoren stehen senkrecht zueinander und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Die über eine Schwingungsdauer gemittelte Energiedichte dieser Welle ist $w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \hat{E}_0^2$ und die Energieflussdichte $J = wc = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \hat{E}_0^2 c$. Was passiert mit dieser Energieflussdichte, wenn wir das Bezugssystem wechseln? (Abb. 2)

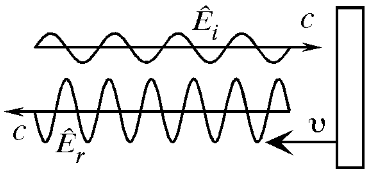

Abbildung 2: Der Spiegel bewege sich mit Geschwindigkeit / /. Die einfallende und die reflektierte elektromagnetische Welle haben verschiedene Amplituden.

Die Feldstärken im Ruhesystem des Laserschwerts (Abb. 2) lassen sich durch eine Lorentztransformation aus denen im Ruhesystem des Spiegels (Abb. 1) herleiten. In erster Ordnung gilt $\hat{E}_i = \hat{E}_0 - v\hat{B}_0$ im Ruhesystem des Schwerts. Die exakten Transformationsgleichungen findet man in[2]. Es folgt in unserem Fall:

$$\hat{E}_i = \gamma(1-\beta)\hat{E}_0 \text{ und } \hat{E}_r = \gamma(1+\beta)\hat{E}_0 \text{ wobei } \beta = v/c \text{ und } \gamma = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2}$$

Weil sich der Spiegel bewegt, muss man bei der Energieflussdichte der auftreffenden oder reflektierten Strahlung die relative Geschwindigkeit einsetzen:

$$J_i = w_i(c+v) = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \hat{E}_i^2(c+v) = \gamma^2(1-\beta)^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \hat{E}_0^2 c(1+\beta) = (1-\beta)J$$

$$J_r = w_r(c-v) = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \hat{E}_r^2(c-v) = \gamma^2(1+\beta)^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \hat{E}_0^2 c(1-\beta) = (1+\beta)J$$

Der Unterschied von einfallender und reflektierter Energie ist gleich der Druckarbeit:

$$J_r - J_i = p_D v$$

Nun ist aber

$$J_r - J_i = (1+\beta)J - (1-\beta)J = 2\beta J = 2vJ/c$$

Somit folgt für den Strahlungsdruck $p_D = 2J/c$

Diese Rechnung ist im Wesentlichen eine vereinfachte Darstellung von Albert Einsteins Herleitung[3]. (Auch ich wollte im Jubiläumsjahr etwas über Relativität schreiben!) Die Felder konnte ich noch "ohne Hilfe" transformieren, aber für die zweite Hälfte musste ich mich von Einstein inspirieren lassen. Ich bin somit leider nur halb so intelligent wie Einstein. Einstein soll ja einen Intelligenzquotienten zwischen 148 und 190 gehabt haben, der Vergleich ist also nicht sehr schmeichelhaft für mich. (Ausser der Intelligenzquotient wäre ein logarithmisches Mass, ähnlich der Dezibel-Skala. Dann sähe es vielleicht gar nicht so schlecht aus.)

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Radiation_pressure (Aufruf am 19. Juli 2005)

[2] J.D. Jackson, "Klassische Elektrodynamik", de Gruyter Verlag, 1982

[3] Albert Einstein, "Zur Elektrodynamik bewegter Körper"
Annalen der Physik, 4. Folge, Band 17, 1905, Seiten 891-921