Kelvin-Spulenpaar

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, 8001 Zürich

Einleitung

Während meiner täglichen Lektüre bin ich auf einen Artikel [1] zur Absolutmessung von magnetischen Dipolmomenten gestossen. Dort wird die "Kelvin-Spule" erwähnt, welche eine alternative Messung von magnetischen Momenten erlaubt. Das wollte ich unbedingt selber ausprobieren.

Besser bekannt ist das Helmholtz-Spulenpaar. Es besteht aus zwei gleichen, runden Flachspulen mit Radius r und Windungszahl N, die im Abstand $d = r$ koaxial aufgestellt und vom gleichen Strom I in gleicher Richtung durchflossen werden. Bei diesem Abstand der zwei Spulen ist das Feld im Inneren näherungsweise homogen, siehe Abbildung 1. Die Anordnung ist offen und wird deshalb gerne verwendet.

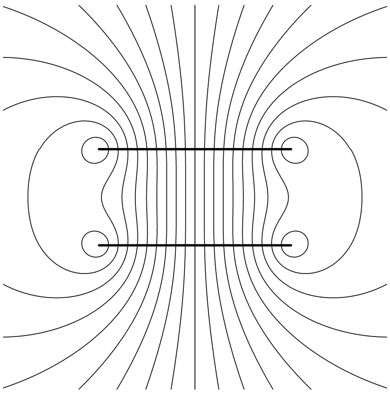

Abbildung 1: Magnet. Feldlinien einer Helmholtzspule (dicke Striche) in der Mittelebene.

Lässt man den Strom gegensinnig durch die Spulen fliessen ("Anti-Helmholtz"), verschwindet das Magnetfeld im Zentrum, dafür weist es einen annähernd konstanten Gradienten auf. Gradientenspulen werden beispielsweise in magneto-optischen Fallen für neutrale Atome oder in medizinischen MRI-Geräten verwendet. Der Bereich mit annähernd konstantem Gradienten in einer Anti-Helmholtz-Spule kann optimiert werden, wenn der Abstand der Spulen auf $d = \sqrt{3}r$ vergrössert wird. Diese Anordnung heisst dann Kelvin-Spulenpaar, siehe Abbildung 2.

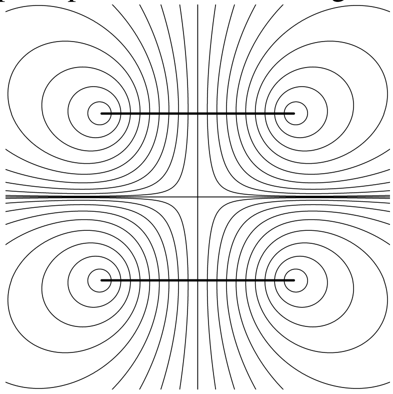

Abbildung 2: Magnetische Feldlinien eines Kelvin-Spulenpaares in der Mittelebene.

Theorie

Die magnetische Flussdichte $B_z(z)$ entlang der Rotationsachse z eines Kreisstromes lässt sich aus dem Biot-Savart Gesetz berechnen. Sei I die Stärke des elektrischen Stromes und r der Kreisradius. Der Mittelpunkt des Kreisstromes befinde sich bei $z = 0$. Dann gilt

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2r} \cdot \frac{r^3}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \tag{1}$$

Bei einer runden Flachspule ist das Feld um die Windungszahl N der Spule grösser. Für $z = 0$ erhält man die bekannte Formel aus [2].

Das Feld der Kelvinspule besteht aus zwei Kreisstromfeldern: $B_z(z+d/2) - B_z(z-d/2)$. In der Mitte ($z = 0$) verschwindet die Flussdichte und deren zweite Ableitung aus Symmetriegründen. Fordert man, dass die dritte Ableitung verschwindet, so erhält man einen optimal konstanten Gradienten.

Die Forderung wird für $d = \sqrt{3}r$ erfüllt. Der Gradient hat in der Mitte folgenden Wert [1]:

$$\frac{dB_z}{dz} = \frac{48\sqrt{3}}{49\sqrt{7}}\frac{\mu_0 NI}{r^2} \approx 0.6413\frac{\mu_0 NI}{r^2} \tag{2}$$

Ein magnetischer Dipol mit Dipolmoment p_m erfährt dort eine Kraft der Stärke

$$F_z = p_m \cdot \frac{dB_z}{dz} \tag{3}$$

wenn der Dipol parallel zum Gradienten (parallel zur z-Achse) ausgerichtet ist.

Experimente

Zuerst wollte ich mich von der Qualität des Gradientenfeldes überzeugen: Ein passendes Gerät aus unserer Sammlung hatte Spulendurchmesser $2r = 167$ mm, Spulenabstand $d = 145$ mm und Windungszahl $N \approx 60$. Ich beschickte sie mit dem Strom $I = (4.0 \pm 0.1)$ A und mass mit einer Hallsonde die Flussdichte B_z entlang der Rotationsachse z. Die Messwerte sind in Abbildung 3 dargestellt und zeigen befriedigende Übereinstimmung mit dem erwarteten Verlauf.

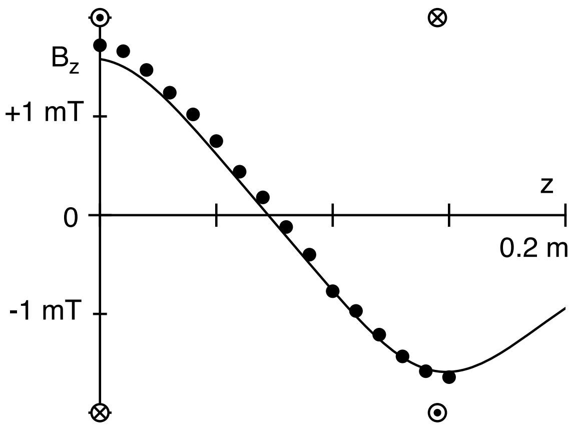

Abbildung 3: Gemessene (schwarze Punkte) und berechnete (Linie) magnetische Feldstärke B_z entlang der Symmetrieachse z eines Kelvin-Spulenpaars. Die Fehlerbalken wären nur leicht grösser als die schwarzen Punkte (2 mm, 0.1 mT). Die zwei Kreisströme (Spulenpaar) sind im Querschnitt angedeutet.

Sodann wollte ich die magnetische Kraft auf eine Kompassnadel im Feld der Kelvinspule messen. Die Messanordnung ist in Abbildung 4 dargestellt. Abbildung 5 zeigt das Ergebnis einer Messreihe. Die Kraft wächst proportional zum Strom, wie nach Gleichung (2) und (3) zu erwarten.

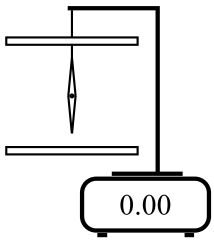

Abbildung 4: Die Kompassnadel wird an einem Faden in der Mitte einer Kelvinspule aufgehängt. Die magnetische Kraft auf die Magnetnadel wird mit einer Digitalwaage gemessen (und in Gramm angezeigt).

Für einen Strom von 4.0 A erhält man aus Gleichung (2) einen Gradienten von 27.7 mT/m, aus Abbildung 5 eine Kraft von 3.59 mN und aus Gleichung (3) ein Dipolmoment $p_m = (0.13 \pm 0.02)\,\mathrm{A \cdot m^2}$

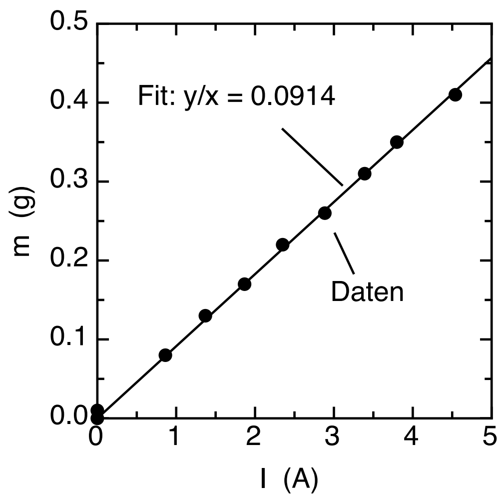

Abbildung 5: Anzeige der Waage als Funktion des Stromes für eine Messung nach Abbildung 4. Die Anzeige (schwarze Punkte) wächst proportional zum Strom. Eine Regression liefert den Proportionalitätsfaktor 0.0914 g/A.

Zur Kontrolle habe ich die Kompassnadel im Erdmagnetfeld schwingen lassen. Die handgestoppte Schwingungsdauer betrug (4.3 ± 0.5) s. Die Fehlerschranke ist wegen der Dämpfung so gross.

Für kleine Auslenkungen ist die Schwingungsdauer einer Kompassnadel, die in einer horizontalen Ebene frei schwingen kann

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{p_m B_H}} \tag{4}$$

Die horizontale Komponente des Zürcher Erdmagnetfelds beträgt $B_H = 21.295\,\mu\mathrm{T}$ [2]. Das Trägheitsmoment [3] einer Kompassnadel (schlanker Rhombus der Länge l und Masse m) ist

$$J = \tfrac{1}{24} l^2 m. \tag{5}$$

Die rautenförmige Magnetnadel aus Stahl hat eine Masse von (2.0 ± 0.2) g, ist 100 mm lang und 9.7 mm breit (und etwa 0.5 mm dick). Es folgt $J = 8.33 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{kg \cdot m^2}$ mit den genannten Zahlen und damit aus Gleichung (4) $p_m = (0.08 \pm 0.03)\,\mathrm{A \cdot m^2}$. Die zwei Messwerte für das Dipolmoment passen also knapp innerhalb der Fehlerschranken zusammen.

Literatur

[1] D.A. Van Baak “Re-creating Gauss’s method for non-electrical absolute measuerements of magnetic fields and moments” Am. J. Phys. 81 (10), Oct. 2013, 738-744

[2] DMK, DPK, DCK, *Formeln Tabellen Begriffe*, Orell Füssli Verlag, Zürich, 2009, ISBN 978-3-280-04059-1

[3] “Hütte, des Ingenieurs Taschenbuch”, 28. Auflage, Verlag von W. Ernst & Sohn, Berlin, 1955

21. März 2014, M. Lieberherr