

Evolventenpendel

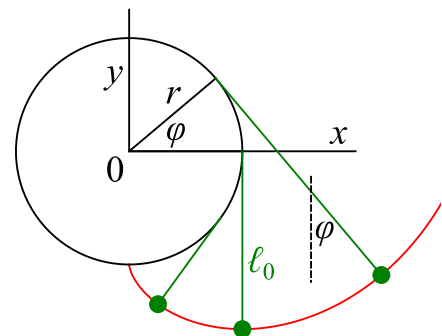
Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

1 Einleitung

Das Evolventenpendel ist ein Fadenpendel, das um einen horizontalen Zylinder gewickelt ist, siehe Abbildung 1. Wird es angestoßen, bewegt sich der Pendelkörper (Massenpunkt) auf einer Kreisevolventen. Der Faden ist stets tangential zum Kreis gespannt. Wie bewegt sich das Pendel? Die Bewegung erfolge in einer vertikalen Ebene senkrecht zur Zylinderachse. Überschläge, die bei starker Anregung möglich wären, wollen wir ignorieren, ebenso Kollisionen mit dem Zylinder.

Abbildung 1: Evolventenpendel

Ein Fadenpendel ist um eine horizontale, zylindrische Stange mit Radius r gewickelt. Die Stange erscheint im Querschnitt als Kreis. Ein kartesisches Koordinatensystem habe den Ursprung im Kreiszentrum, die Abszissenachse (x) liege auf dem horizontalen Kreisdurchmesser und die Ordinatenachse (y) auf dem vertikalen. Der Faden tangiere bei (r, φ) den Kreis; der momentane Winkel φ wird auch vom gespannten Faden und der Vertikalen eingeschlossen. Im Gleichgewicht ist $\varphi = 0$ und der frei hängende Faden habe die Länge ℓ_0 . Wird der Faden bis zum Winkel φ ausgelenkt, so wird die Länge $r\varphi$ vom Kreis abgewickelt und die freie Fadenlänge verlängert sich auf $\ell_0 + r\varphi$. Für $\varphi < 0$ verkürzt sich die Länge entsprechend.



2 Theorie

Die Bahn des Pendelkörpers in Abb. 1 ist eine Kreisevolvente (engl. involute of a circle). Parametrisiert mit dem Winkel φ sind die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + (\ell_0 + r\varphi) \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix} \quad (1)$$

Der minimal mögliche Auslenkwinkel ist dort, wo das Pendel links gegen den Zylinder schlägt:

$$\varphi_{\min} = -\ell_0/r \quad (= -\pi/2 \text{ in Abb. 1}) \quad (2)$$

Die momentane Geschwindigkeit ist

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \dots = (\ell_0 + r\varphi) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \dot{\varphi} \quad (3)$$

2.1 Energie

Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\ell_0 + r\varphi)^2 \dot{\varphi}^2 \quad (4)$$

Die potentielle Energie ist

$$V = mgy = mgr \sin \varphi - mg(\ell_0 + r\varphi) \cos \varphi \quad (5)$$

Da die Gesamtenergie $E = T + V$ erhalten ist, muss die zeitliche Ableitung verschwinden

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2}m(\ell_0 + r\varphi)^2 \dot{\varphi}^2 + mgr \sin \varphi - mg(\ell_0 + r\varphi) \cos \varphi \right\} = 0 \quad (6)$$

(...)

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g \sin \varphi + r\dot{\varphi}^2}{\ell_0 + r\varphi} \quad (7)$$

Für kleine Winkel ($|\varphi| \ll \pi/2$) und Winkelgeschwindigkeiten ($|\dot{\varphi}|$) geht sie in die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels über. Dieselbe Differentialgleichung folgt auch mit Lagrange-Mechanik.

Die maximale Auslenkung $\varphi_{\max} > 0$ auf der freien Seite bestimmt den Betrag der maximalen Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_{\max}$ in der Gleichgewichtslage bei $\varphi = 0$:

$$T_0 + V_{\min} = 0 + V_{\max} \quad (8)$$

$$\frac{1}{2}\ell_0^2 \dot{\varphi}_{\max}^2 - g\ell_0 = gr \sin \varphi_{\max} - g(\ell_0 + r\varphi_{\max}) \cos \varphi_{\max} \quad (9)$$

Die umgekehrte Rechnung ($\dot{\varphi}_{\max} \rightarrow \varphi_{\max}$) führt leider auf eine transzente Gleichung. Falls das Pendel die Gleichgewichtslage zu schnell nach links passiert, kann der Pendelkörper gegen den Zylinder schlagen.

2.2 Numerische Intergration der Bewegungsgleichung

Abbildung 2 zeigt zwei numerische Integrationen. Die Bewegungsgleichung (7) wurde mit dem Euler-Cromer-Verfahren in Python gelöst und graphisch dargestellt.

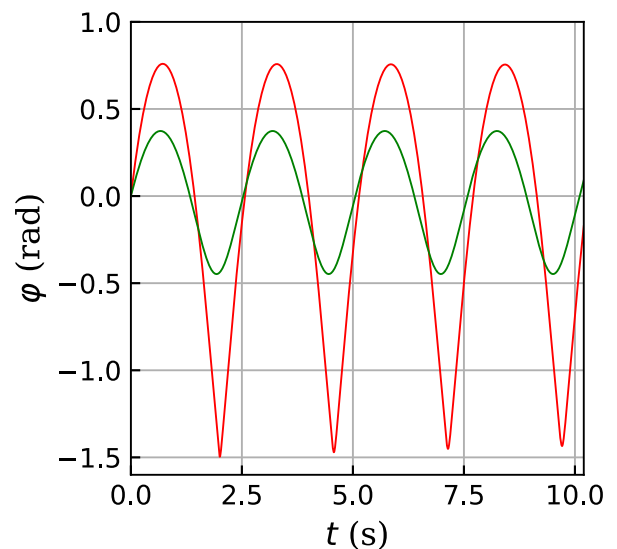
Abbildung 2: Zwei Bahnen eines Evolventenpendels

Die Parameterwerte sind

$$r = 1.0 \text{ m}, g = 9.81 \text{ m/s}^2 \text{ und } \ell_0 = r \cdot \pi/2.$$

Die grüne Bahn ist für eher kleine Auslenkungen, die rote für maximal grosse. Bei den gewählten Zahlen ist der minimale Ausschlag $\varphi_{\min} = -\pi/2$. Wird das Pendel stärker angestossen, schlägt es gegen den Zylinder. Für ganz kleine Amplituden ergibt sich eine Schwingungsdauer von $T = 2\pi \sqrt{\ell_0/g} = 2\pi \sqrt{1.0 \text{ m} \cdot \pi/(2 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2)} = 2.514 \text{ s}$, was zur grünen Kurve passt. Die Schwingungsdauer wächst mit der Amplitude leicht an.

Die Bahnen sind periodisch, aber unsymmetrisch bezüglich $\varphi = 0$. Die Amplitude nimmt wegen Diskretisierungsfehlern mit der Zeit leicht ab.



3 Experiment

Ich nahm ein hohes, zylindrisches Glasgefäß von etwa 25 cm Durchmesser und lege es horizontal auf zwei Holzklötze. Dann klebte ich den Faden, an dem der kleine Pendelkörper hing, oben auf das Glas. Das Pendel konnte vor dem Tisch frei schwingen. Die Situation entsprach etwa Abbildung 1. Die Bewegung wurde mit dem Mobiltelefon videographiert, mit dem Gratis-Programm Tracker¹ analysiert und mit der in Python numerisch integrierten Bewegungsgleichung (7) verglichen, siehe Abbildung 3.

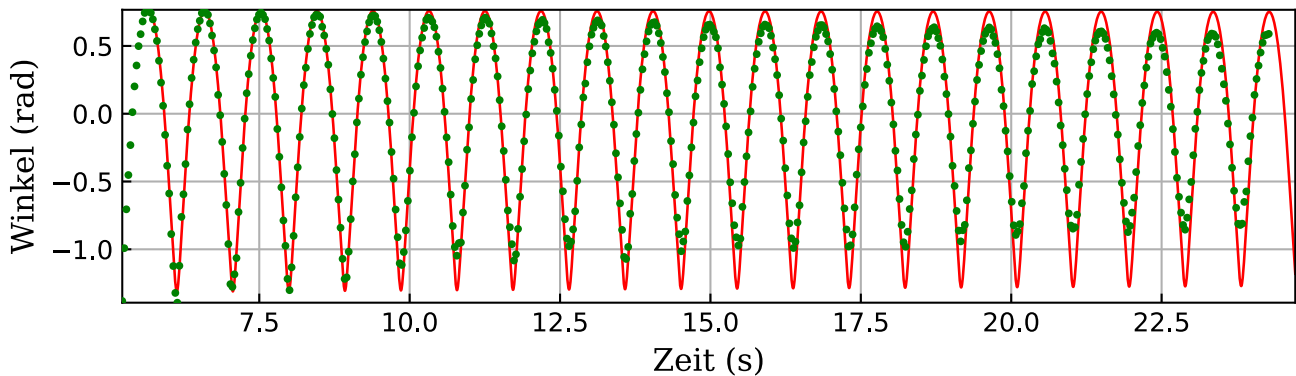


Abbildung 3: Gemessene Bahn (grüne Punkte) und berechnete Bahn (rote Linie) eines Evolventenpendels. Die Theoriekurve wurde “von Hand” an die Messdaten gefittet. Die Parameterwerte sind $r = 0.125$ m, $\ell_0 = 0.2051$ m und $g = 9.81$ m/s². Die Dämpfung wurde in der Simulation weggelassen.

4 Diskussion

Nicht jede Schwingung ist sinusförmig (harmonisch). Nicht jede Schwingung ist symmetrisch. Nicht jede Schwingung hat eine Periode, die unabhängig von der Amplitude ist. Nicht jede Schwingung ist periodisch.

Die Theorie und die Messungen zum Evolventenpendel sind anspruchsvoll, wären aber mit einer guten Klasse oder als Projekt durchaus machbar.

Der symmetrische Fall, bei dem der Faden zwischen zwei Zylindern eingeklemmt ist, wurde schon von Huygens betrachtet. Es war ein früher Versuch, eine genau laufende Pendeluhr zu konstruieren.² Später erfand er das bekanntere Zykloidenpendel. Das Fadenpendel zwischen zwei Zylindern ist immer noch Gegenstand der Forschung.³ Der unsymmetrische Fall, d.h. nur auf einer Seite ein Zylinder, wurde auch schon betrachtet, sogar mit elastischem Faden.⁴

¹ <https://physlets.org/tracker> (16. September 2023)

² <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/Involute/> (16. September 2023)

³ H. Mazaheri a, A. Hosseinzadeh b, M.T. Ahmadian, “Nonlinear oscillation analysis of a pendulum wrapping on a cylinder”, *Scientia Iranica B* (2012) 19 (2), 335–340

⁴ I. Ivanov, “Nonlinear oscillations of a pendulum wrapped around a cylinder”, DOI:10.5937/imk2103105i (2021)