Einheiten 2.0

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

1 Einleitung

Warum sollen sich Schülerinnen und Schüler mit Einheiten befassen? Natürlich gibt es Abzug, wenn sie in der Prüfung mit den Einheiten schludern, aber genügt das als Motivation? Warum nicht einmal hinten anfangen, und eine Unterrichtssequenz um Einheiten herum drapieren? Der Weg von einer physikalischen Grösse respektive deren Einheit zu einem Gesetz ist ein Beispiel für kreatives, induktives Vorgehen. Der umgekehrte Weg, die axiomatische Herleitung aus wenigen Grundgesetzen, ist dagegen "mostly derivative" (Sheldon) und unsicher, wenn man nicht um die Voraussetzungen weiss (und genauso unklar für Lernende mit fragilen Mathematikfähigkeiten). Es folgen einige Beispiele, die sich bei Gelegenheit in den Unterricht einstreuen lassen.

2 Eins

Schreibe die Zahl Eins auf ein Dutzend verschiedene Arten.

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1\,\mathrm{m}}{100\,\mathrm{cm}} = \frac{1\,\mathrm{h}}{60\,\mathrm{min}} = \frac{60\,\mathrm{s}}{1\,\mathrm{min}} = 100\,\% = \frac{144}{1\,\mathrm{gr}} = \frac{3.6\,\mathrm{MJ}}{1\,\mathrm{kWh}} \\ &= \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{360°} = \frac{1\,\mathrm{yd}}{3\,\mathrm{ft}} = \frac{75\,\mathrm{kp\,m/s}}{1\,\mathrm{PS}} = \frac{1\,\mathrm{at}}{0.980665\,\mathrm{bar}} = \frac{0.2\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{ct}} = 24\,\mathrm{kt} \end{aligned}$$

Zu jedem Umrechnungsfaktor lässt sich eine Geschichte oder Anekdote erzählen, z.B. von der Sekunde, die auf "pars minuta secunda", die "zweimal verminderte" (Stunde), zurückgeht und dass die Sechzigerteilung auf dem babylonischen 60er-Zahlensystem beruht[1] und dass der Schweizer Jost Bürgi 1585 als Erster eine Uhr mit Sekundenzeiger gebaut hatte.[2] Dank Wikipedia et. al. können solche Trivia megabyteweise aus dem Internet gefischt werden.

3 Versteckte Gesetze

Beispiel: Wie schreibt man den Umrechnungsfaktor 931.49 MeV/u in SI-Einheiten?

$$931.49\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{u}} = 931.49 \cdot \frac{1.602\,176 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J}}{1.660\,539 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}} = \ldots\,\mathrm{J/kg} = \ldots\,\mathrm{m^2/s^2} = (2.9979 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})^2$$

Im Umrechnungsfaktor von atomaren Masseeinheiten in Mega-Elektronvolt ist die wohl berühmteste Gleichung der Physik versteckt: $E = mc^2$.

4 Hilf den Astronomen

Beispiel: Wandle Magnituden in Dezibel um.

Grössenklassen und Schallpegel beruhen beide auf dem Weber-Fechner Gesetz. Somit sollten sich die Magnituden in Dezibel umrechnen lassen. Es ist nicht nötig, für die Helligkeit ein separates Mass einzuführen. Norman

Pogson hat die scheinbare Helligkeit so definiert, dass ein Stern erster Grösse (1.0 mag) genau hundert Mal so hell ist wie ein Stern sechster Grösse.[3] Sterne sechster Grösse sind gerade noch so sichtbar. Ein Unterschied von 5 mag entspricht somit 20 dB. Man könnte also schreiben

$$\frac{m_0 - m}{L - L_0} = \frac{5\,\mathrm{mag}}{20\,\mathrm{dB}}$$

Man bräuchte nur noch festzulegen, wo die Helligkeits-Dezibelskala beginnen soll (L_0). Das wird aber kaum passieren: Die überflüssigen Magnituden sind genauso zählebig wie die überflüssigen Kalorien.

Beispiel: Als Dr. Eleanor Arroway und Kollegen im Film "Contact" ein Signal von Ausserirdischen empfingen, sei es "über hundert Jansky" stark gewesen.[4]
Jansky? Nie gehört! Was ist das und sind 100 Jy viel? Wikipedia kann helfen:

$$1\,\mathrm{Jy} = 10^{-26}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{Hz}\cdot\mathrm{m}^2}$$

Jansky ist das Mass der Radioastronomen für die spektrale Leistungsflussdichte. Welche Flussdichte pro Frequenzband würde ein Mobiltelefon auf dem Mond bei uns erzeugen? Mobiltelefone senden mit bis zu 1 W. Der Abstand zweier Trägerfrequenzen ist 200 kHz. Damit folgt sehr grob geschätzt (isotrope Abstrahlung, ..)

$$\frac{P}{\Delta f\cdot 4\pi r^2} = \frac{1\,\mathrm{W}}{200\cdot 10^3\,\mathrm{Hz}\cdot 4\pi\cdot(3.844\cdot 10^8\,\mathrm{m})^2} = 2.69\cdot 10^{-24}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{Hz}\cdot\mathrm{m}^2} \approx 300\,\mathrm{Jy}$$

Hätte ein Astronaut sein Handy auf dem Mond benützen können, so wäre es eine der stärksten, astronomischen Radioquellen gewesen. Man konnte damals ja auch problemlos per Funk Kontakt aufnehmen. Man könnte jetzt versuchen, auf die Stärke der Quelle im Film zurück zu rechnen, denn das Signal der Frequenz 4.4623 GHz solle von der Vega gekommen sein.[4] ($\pi \times 1420.40575177\,\mathrm{MHz} = 4.46233627\,\mathrm{GHz}$ kann nicht als Harmonische der 21-cm-Wasserstofflinie auftreten und wurde für extraterrestrische Kommunikation vorgeschlagen.)

5 Ampere 2019

Im Herbstsemester 2019 hat die DPK einen Kurs an der METAS in Wabern bei Bern organisiert – danke vielmals! Anlass war die Neudefinition vieler SI-Einheiten im Jahr 2018/2019. Markus Wey schlug vor, das Ampere als eine gewisse Anzahl Elementarladungen pro Sekunde zu schreiben, denn der Elementarladung ist neu ein fester Wert zugewiesen. Wie vielen Elementarladungen pro Sekunde entspricht ein Ampere?
a) Auf 10 % genau durch Kopfrechnen.
b) Auf so viele Dezimalstellen wie es der Taschenrechner zulässt.
c) Auf unendlich viele Dezimalstellen genau.

a) $I = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \dfrac{e\cdot\Delta N}{\Delta t} \Rightarrow \dfrac{\Delta N}{\Delta t} = \dfrac{I}{e} = \dfrac{1.\overline{0}\,\mathrm{A}}{1.60\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} = 0.63\cdot 10^{19}\,\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}} = \underline{\underline{6.3\cdot 10^{18}\,\mathrm{s}^{-1}}}$

b) $\dfrac{\Delta N}{\Delta t} = \dfrac{I}{e} = \dfrac{1.\overline{0}\,\mathrm{A}}{1.602\,176\,634\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} = \underline{\underline{6.241\,509\,074\cdot 10^{18}\,\mathrm{s}^{-1}}}$

c) Der Zahlenwert der Elementarladung ist eine rationale Zahl, ihr Kehrwert somit auch:

$$\{e\} = 1.602\,176\,634\cdot 10^{-19} = \frac{1.602\,176\,634}{10^{19}} = \frac{1\,602\,176\,634}{10^{28}}$$

$$\left\{\frac{\Delta N}{\Delta t}\right\} = \frac{10^{28}}{1\,602\,176\,634} = \frac{10^{28}}{2\cdot 3^2\cdot 19\cdot 389\cdot 12043}$$

Die Primfaktorzerlegung sieht schlecht aus.

WolframAlpha[5] liefert die ersten Dezimalstellen und eine Periode von 778 716 Ziffern:

$$\{I/e\} = 6\,241\,509\,074\,460\,762\,607.776\,240\,980\,930\,445\,899\,886\,965\,896\,170\,971\,1..$$

Im Prinzip können durch Division ganzer Zahlen mit Rest beliebig viele Ziffern der Dezimaldarstellung berechnet werden. Der Dezimalbruch muss periodisch sein, aber eine Periodenlänge von 778 716 motiviert nicht sehr, diesen Weg auch zu beschreiten.

6 Kelvin 2019

Im gleichen DPK-Kurs wurde von Beat Jeckelmann erwähnt, dass der Tripelpunkt als Fixpunkt der Kelvinskala in Pension geschickt wurde und stattdessen die Boltzmannkonstante k einen festen Wert erhalten hat. Die Boltzmannkonstante wurde mittels eines akustischen Resonators am genauesten bestimmt und bei diesem Wert eingefroren. Akustische Thermometer nützen aus, dass die Schallgeschwindigkeit mit steigender Temperatur wächst. Natürlich musste ich gleich ausprobieren, wie man das den Schülerinnen und Schülern auf einfache Weise zeigen könnte.
Aus dem Altkarton fischte ich eine Röhre von etwa 42 cm Länge und 4 cm Durchmesser heraus und legte meinen Haarföhn bereit. Ich startete die App PhyPhox[6] auf meinem Smartphone und liess mir das Tonspektrum mit langer Integrationszeit anzeigen. Ich stellte den Föhn auf die kühlste Stufe und richtete ihn auf das Ende des Rohrs. Die Wirbel des Luftstroms regten Eigenschwingungen der Luftsäule im Rohr an. PhyPhox zeigte eine Frequenzsspitze bei (0.38 ± 0.01) kHz. Stellte ich den Föhn auf heiss, stieg diese Frequenz auf (0.41 ± 0.01) kHz. Mit etwas gutem Willen kann man den Frequenzanstieg sogar hören. Ist dieser Frequenzanstieg real oder eingebildet? Mit den bekannten Gesetzen zur Grundfrequenz einer offenen Pfeife und der Temperaturabhängigkeit einer Schallwelle erhält man:

$$f = \frac{c}{2\ell} \wedge c = \sqrt{\frac{\varkappa k N_A T}{M}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 = \left(\frac{0.41\,\mathrm{kHz}}{0.38\,\mathrm{kHz}}\right)^2 = 1.16$$

Aus dem Frequenzverhältnis erhalten wir einen Temperaturanstieg von z.B. 300 K auf ca. 350 K, ein Resultat, das angesichts der recht grossen Fehlerschranken nicht unvernünftig erscheint. Die 0.38 kHz passen auch zur Rohrlänge.
Im antiken China wurden gestimmte Flöten als Längenmassstab verwendet. Die Realisierung einer Einheit durch Resonatoren ist also eine sehr alte Idee.

23. November 2019, Lie.

---

[1] `https://de.wikipedia.org/wiki/Minute` (Abruf am 22. April 2018)

[2] `https://de.wikipedia.org/wiki/Sekunde` (Abruf am 22. April 2018)

[3] `https://de.wikipedia.org/wiki/Scheinbare_Helligkeit` (Abruf am 20. Juli 2018)

[4] `https://www.imdb.com/title/tt0118884/trivia` (Abruf am 20. Juli 2018)

[5] `https://www.wolframalpha.com/` (Abruf am 4. September 2019)

[6] `https://phyphox.org/de/home-de/` (Abruf am 26. Oktober 2019)