Doppelt schiefer Wurf

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

1 Einleitung

Was passiert, wenn der schiefe Wurf eines Balls mit der schief gehaltenen Kamera videographiert wird?

Nachdem mir während einer Phase seniler Bettflucht diese Aufgabe und eine einfache Lösung dazu eingefallen waren, musste ich das natürlich am nächsten Tag gleich ausprobieren. Man kann schliesslich immer Ideen für Unterrichtsprojekte brauchen. Wie so oft hat sich dann die Auswertung als tricky erwiesen.

2 Experiment

Ein 1.00 m langer Massstab wurde vertikal an die Wandtafel gehängt (als Kontrolle). Die Kamera, mein Samsung Galaxy A53 Mobiltelefon, montierte ich schräg davor auf ein Stativ. Die Bildebene wurde von Auge parallel zur Wandtafel orientiert. Der Abstand zur Wandtafel betrug ca. zwei Meter. Die Bildrate beliess ich bei den üblichen 30 frames per second.

Nachdem mein Kollege Daniel Keller die Videoaufnahme gestartet hatte, warf ich einen Tennisball vor der Wandtafel auf eine parabolische Bahn. Das Video wurde anschliessend mit Tracker[1] analysiert und die Koordinaten in Python importiert, wo ich Ausgleichsrechnungen durchführen konnte. Mit der Länge des aufgehängten Massstabs wurde die Längeneinheit der Bildkoordinaten kalibriert. Abbildung 1 zeigt das Resultat.

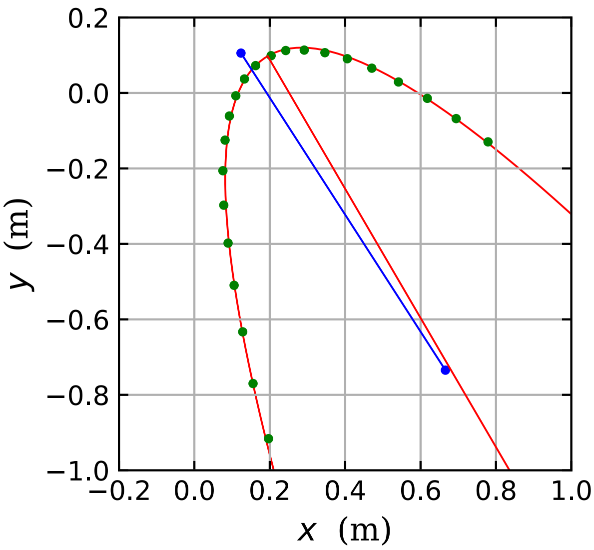

Abbildung 1: Getrackte Positionen eines schiefen Wurfs (grüne Punkte in 33 ms *Abständen) mit einer parabolischen Ausgleichsfunktion (rote Linie). Die blaue Linie mit den runden Endmarken stellt einen vertikalen Massstab von 100* cm *Länge dar. Aus der Fitfunktion wurde der Scheitel der Parabel sowie deren Symmetrieachse bestimmt. Die berechnete Symmetrieachse ist als rote Gerade durch den Scheitel eingezeichnet.*

3 Theorie

Wird die Kamera schief gehalten, so bekommt die Fallbeschleunigung x- und y-Komponenten in den Bildkoordinaten. Die Bewegung ist somit eine gleichmässig beschleunigte Bewegung in x- und y-Richtung.

$$x = x_0 + v_{x0}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \qquad v_x = v_{x0} + a_x t \qquad g = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$y = y_0 + v_{y0}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 \qquad v_y = v_{y0} + a_y t \qquad \vec{g} = (a_x,\, a_y)^T$$

Die Anpassung zweier quadratischer Funktionen an die $x_i(t_i)$- und $y_i(t_i)$-Datensätze ist eine Standardaufgabe, die sogar Excel™ beherrscht, wenn nicht gerade die verarmte Webversion verwendet wird.

In Abbildung 1 ist so eine Ausgleichsparabel als rote Kurve eingezeichnet. Am Scheitel bewegt sich der Ball senkrecht zum Beschleunigungsvektor. Damit folgt für den Zeitpunkt des Scheiteldurchgangs:

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = a_x v_x + a_y v_y = 0 \rightarrow a_x \cdot (v_{x0} + a_x t) + a_y \cdot (v_{y0} + a_y t) = 0 \Rightarrow t = -\frac{a_x v_{x0} + a_y v_{y0}}{a_x^2 + a_y^2}$$

Die Richtung des Beschleunigungsvektors ist nur ungefähr parallel zum vertikalen Massstab. Aus den zwei Beschleunigungskomponenten folgt ein Betrag von $g = 11.0\,\mathrm{m/s^2}$, was eindeutig zu hoch ist.

4 Diskussion

Der falsche Wert der Fallbeschleunigung lässt sich zumindest grob erklären: Die Wurfparabel lag geschätzte 20 cm vor der Wandtafel mit dem Massstab. Dies ist ca. 10 % des Abstands Kamera-Wandtafel. Somit erscheinen die Bildkoordinaten und damit die Beschleunigung ebenfalls etwa 10 % zu gross.

Die Ausgleichsrechnung mit einer impliziten Kegelschnittgleichung gestattet einen unabhängigen Test:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Für die Rechnung habe ich $F = -1$ gesetzt. Das quadratische Polynom beschreibt eine Ellipse, falls die Diskriminante $B^2 - 4AC$ negativ ist, eine Parabel, falls sie verschwindet und eine Hyperbel, falls sie positiv ist. Spezialfälle sind hier nicht relevant. Die Ausgleichsrechnung ergab als besten Fit eine sehr lang gestreckte Ellipse ($a = 15.1\,\mathrm{m}$, $b = 1.54\,\mathrm{m}$). Ich erachte das als numerischen Zufall, denn die Diskriminante war sehr nahe bei Null. Trotzdem habe ich diese Ausgleichsellipse und ihre grosse Halbachse in Abbildung 2 eingezeichnet.

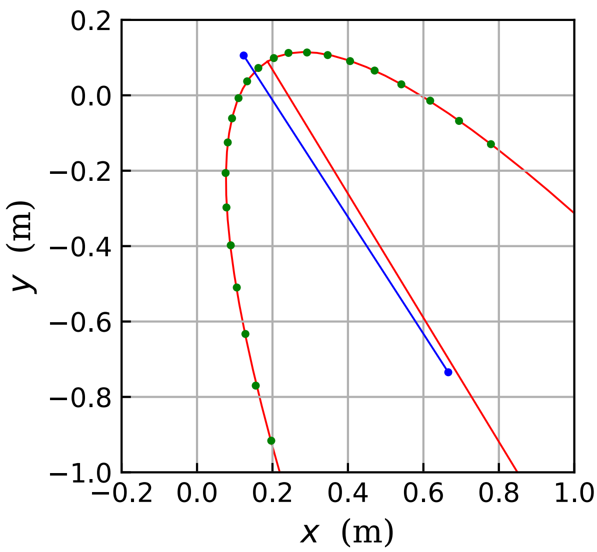

Abbildung 2: Getrackter schiefer Wurf (grüne Punkte, wie in Abb. 1) mit einer Ausgleichsellipse. Die Richtung der grossen Halbachse (rote Gerade) ist auch hier nicht parallel zum vertikalen Massstab (blaue Linie mit Marken). Die Ellipse passt etwas besser an die Ortsdaten als die Parabel.

Die zentrale Projektion eines Kegelschnitts auf eine nicht parallele Ebene ergibt wieder einen Kegelschnitt, allerdings nicht unbedingt denselben. Der Blick auf einen Doppelkegel, der von Ebenen geschnitten wird, um einen Kegelschnitt zu erzeugen, zeigt das sofort. Die Brennpunkte des projizierten Kegelschnitts sind in der Regel verschieden von den Bildern der Brennpunkte des Urbilds. Es ist zu erwarten, dass die Projektion einer Parabel eine Ellipse oder Hyperbel wird, denn es ist unwahrscheinlich, dass die Parabelebene exakt parallel zur Bildebene ist. Es wäre auch Zufall, wenn die Symmetrieachse des Fits parallel zur Vertikalen ist.

Vor einem analogen Problem stehen die Astronomen, wenn sie extrasolare Bahnen beobachten: Durch die Projektion auf die Himmelssphäre geht die Tiefeninformation verloren. Ohne zusätzliche Angaben ist es nicht mehr möglich, die Neigung der Bahn zu bestimmen.

---

[1] https://physlets.org/tracker (12. September 2024)