Dipolkraft

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

Im letzten Artikel über das schwache Reaktionsprinzip[1] hatte ich leider geschlampt, wie ich feststellen musste, nachdem mich ein aufmerksamer Leser darauf aufmerksam gemacht hat. Die Kraft auf den magnetischen Dipol ist natürlich nicht tangential zu den Feldlinien. Die Aussage, dass Aktions- und Reaktionskraft verschiedene Wirkungslinien haben können, ist aber nicht gefährdet.
Hätte ich Kräfte ausgerechnet und nicht nur skizziert, wäre das nicht passiert. Für die Abbildungen 1 und 2 habe ich das nachgeholt. Diesmal sind es elektrische Dipole, aber das Resultat gilt auch für magnetische.

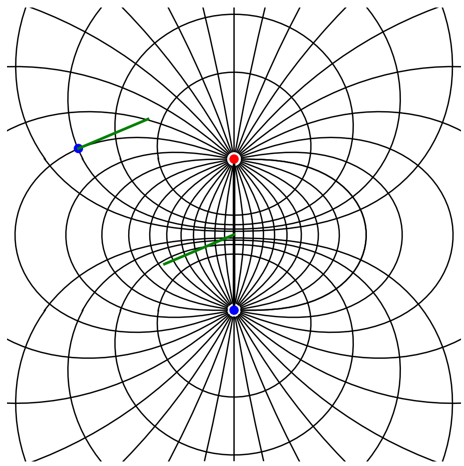

Abbildung 1: Berechnete elektrostatische Kräfte (grüne Linien) zwischen einem elektrischen Dipol und einem elektrischen Monopol. Der vertikale Dipol besteht aus zwei Monopolen in endlichem Abstand. Die gezeichneten Äquipotential- und Feldlinien sind jene des zentralen Dipols. Die Kraft auf den Monopol ist tangential zu den Feldlinien des Dipols.

Die Kraft auf den Monopol in Abbildung 1 zeigt am Dipol vorbei, d.h. Aktions- und Reaktionskraft sind parallel gerichtet, liegen aber auf verschiedenen Wirkungslinien.

Ein zweiter Dipol bestehe ebenfalls aus zwei Monopolen in endlichem Abstand. Beide Monopole erfahren je eine Kraft durch den zentralen Dipol. Die resultierende Kraft auf den zweiten Dipol ist einfach die Summe dieser Kräfte, siehe Abbildung 2. Auch hier gilt, dass Aktions- und Reaktionskraft zwischen den Dipolen gleich stark und entgegegengesetzt gerichtet sind, aber verschiedene Wirkungslinien haben.

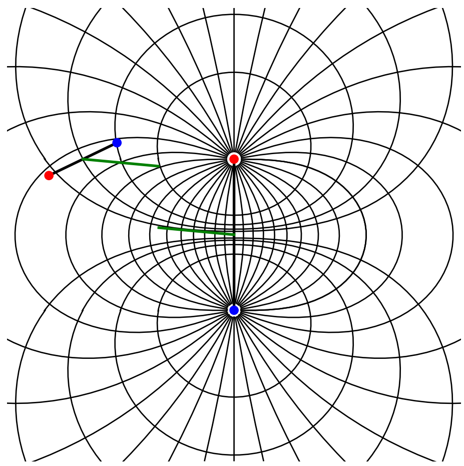

Abbildung 2: Berechnete elektrostatische Kraft des zentralen Dipols auf den schrägen Dipol sowie die Reaktionskraft. Beide Kräfte sind als grüne Linien in den Schwerpunkten eingezeichnet. Die Kraft ist in der Regel nicht tangential zu den Feld- oder Äquipotentiallinien. Aktions- und Reaktionskraft liegen meistens auf verschiedenen Wirkungslinien.

Werden die Dipole in der Simulation verkürzt, siehe Abb. 3, so ändert sich wenig an dieser Aussage, denn für Punktdipole lässt sie sich exakt nachrechnen.

Wechselwirkungskräfte zwischen Punktdipolen

Die elektrostatische Feldstärke $\vec{E}$ in der Umgebung eines Punktdipols sowie die Kraft auf einen zweiten Dipol in diesem Feld lassen sich mit moderatem Aufwand exakt von Hand berechnen.[2] Der erste Dipol befinde sich im Nullpunkt eines Koordinatensystem und habe elektrisches Dipolmoment $\vec{p}_1$.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(3 \cdot \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{r}}{r^5} \cdot \vec{r} - \frac{\vec{p}_1}{r^3}\right)$$

Ein zweiter Punktdipol $\vec{p}_2$ erfährt im Feld die Kraft[2]

$$\vec{F}_2 = \vec{\nabla}\left(\vec{p}_2 \cdot \vec{E}\right) \sim \vec{\nabla}\left(3 \cdot \frac{(\vec{p}_1 \cdot \vec{r})\,(\vec{p}_2 \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{p}_1}{r^3}\right)$$

Diese Kraft ist in der Regel nicht radial gerichtet, was wir an einem Beispiel nachrechnen wollen.

$$\begin{aligned}
&\vec{p}_1 = (0, p_1, 0)^T && \text{in } y\text{-Richtung orientiert} \\
&\vec{p}_2 = (p_2, 0, 0)^T && \text{in } x\text{-Richtung orientiert} \\
&\vec{r} = (x, y, z)^T && \text{Ortsvektor des zweiten Dipols} \\
&\vec{F}_2 \sim \vec{\nabla}\left(3 \cdot \frac{p_1 y \cdot p_2 x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right) \sim \begin{pmatrix}\partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z\end{pmatrix}\left(\frac{yx}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right) \\
&\vec{F}_2 \sim \left(\frac{y(-4x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{7/2}}, \frac{x(x^2-4y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{7/2}}, -\frac{5xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{7/2}}\right)^T \\
&\vec{r} = (x, 0, 0)^T \rightarrow \vec{F}_2 \sim \left(0, \frac{1}{x^4}, 0\right)^T
\end{aligned}$$

Für $y = z = 0$ erfährt der zweite Dipol eine Kraft $\vec{F}_2$ in y-Richtung, was in diesem Beispiel senkrecht zur Verbindungslinie (x-Achse) der zwei Dipole ist. Ein numerischer Test mit zwei kleinen, endlichen Dipolen bestätigt dieses Resultat, siehe Abbildung 3. Die Rechnung ist rein elektrostatisch. An das dynamische Problem habe ich mich nicht herangewagt.

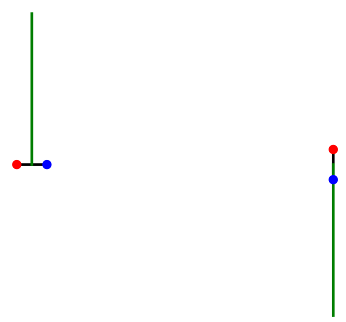

Abbildung 3: Numerisch bestimmte Wechselwirkungskräfte (grüne Linien) zwischen zwei senkrecht orientierten, kleinen Dipolen.

Aktions- und Reaktionskraft sind entgegengesetzt gerichtet, gleich stark und liegen auf verschiedenen Wirkungslinien. Dasselbe Resultat folgt aus der exakten Rechnung mit zwei Punktdipolen.

---

[1] VSMP-Bulletin Nr. 154, Januar 2024, Seiten 6-8

[2] J. D. Jackson, “Klassische Elektrodynamik”, 2. Auflage, de Gruyter Verlag, New York, Berlin, 1983