Rottsches Pendel

Nicholas Rott (1917-2006), ETH-Professor für Fluiddynamik
Ein rottsches Pendel besteht aus zwei stark gekoppelten, physikalischen Pendeln; es gibt mehrere Versionen. Eine beliebte Variante ist in Abbildung 1 dargestellt.
Nikolaus Rott, "A multiple pendulum for the demonstration of non-linear coupling", Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP **21**, 570-582 (1970)

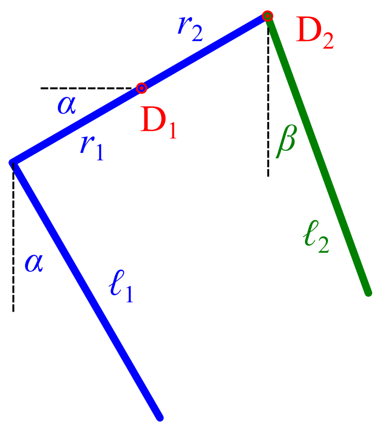

Abbildung 1: Vereinfachtes Rott'sches Pendel
Es bestehe aus massiven, dünnen Stangen mit homogenem Massenbelag $\mu = \Delta m/\Delta s$. Die Drehachse D_1 ist fest, die Drehachse D_2 beweglich. Der orthogonal gewinkelte Hebel hat die Längen ℓ_1 und $r_1 + r_2$, der gerade Stab die Länge ℓ_2. Der Hebel sei um α gegen die Horizontale ausgelenkt, der Stab um β aus der Vertikalen. Im Gleichgewicht soll $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ sein. Die übliche Wahl ist $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ und $r_1 = r_2 = r$

Mit Lagrange-Mechanik folgt dieses gekoppelte Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\left(4r^3 + 12\ell r^2 + 2\ell^3\right)\ddot{\alpha} \quad - 3\ell^2 r\sin(\alpha-\beta)\ddot{\beta} \quad &= 3\ell^2 r\cos(\alpha-\beta)(\dot{\alpha}-\dot{\beta})\dot{\beta} - 3\ell^2 r\cos(\alpha-\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} - 3g\ell^2\sin\alpha \\
-3\ell^2 r\sin(\alpha-\beta)\ddot{\alpha} \quad + 2\ell^3\ddot{\beta} \quad &= 3\ell^2 r\cos(\alpha-\beta)(\dot{\alpha}-\dot{\beta})\dot{\alpha} + 3\ell^2 r\cos(\alpha-\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} - 3g\ell^2\sin\beta
\end{aligned}$$

Man könnte noch $\ddot{\alpha}$ und $\ddot{\beta}$ auflösen.

Für $r/\ell \approx 0.64178$ hat die bewegliche Stange (ℓ_2) die doppelte Eigenfrequenz wie der Winkelhebel. Dann sind die zwei Pendel stark gekoppelt und es kann – bei genügender Energiezufuhr – deterministisches Chaos auftreten.