Reuleux-Dreieck

Das Reuleux-Dreieck ist – nach dem Kreis – das einfachste Gleichdick. Ein Gleichdick hat überall denselben Durchmesser, wenn dieser als Abstand zwischen parallelen Tangenten definiert wird (Schublehre!). Es ist nach dem deutschen Maschinenbau-Ingenieur Franz Reuleux (1829-1905) benannt. Es findet Anwendung im Drehkolbenmotor (Wankel) und als Ornament in gotischen Spitzbögen. Das Reuleux-Dreieck ist eben, respektive kann als Querschnitt eines geraden Zylinders betrachtet werden. Das Reuleux-Tetraeder ist die Verallgemeinerung in drei Dimensionen.

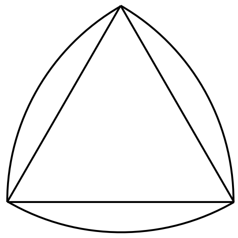


Abbildung 1: Reuleux-Dreieck
Die Figur besteht aus drei Kreisbögen, die um die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks gezogen werden, und Zentriwinkel $\pi/6$ (60°) sowie einen Radius gleich der Dreiecksseite haben. Die Kreisbögen treffen sich an den Dreieck-Ecken unter einem Winkel von $\pi/3$ (120°).

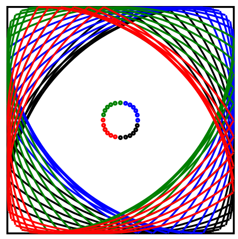


Abbildung 2: Gleichdick im Quadrat
Ein Reuleux-Dreieck kann in einem Quadrat rotieren und dabei immer alle Seiten berühren. Der Schwerpunkt bewegt sich dabei, aber nicht auf einem Kreis. Wird der Schwerpunkt entsprechend bewegt, können mit einem Gleichdick (fast) quadratische Löcher gebohrt werden. Das Bild besteht aus einem Quadrat und 24 Reuleux-Dreiecken, die jeweils 5° gegen einander verdreht sind.

Abbildung 3: Bezeichnungen im Reuleux-Dreieck

r Bogenradius, Dreieckseite, Gleichdickdurchmesser

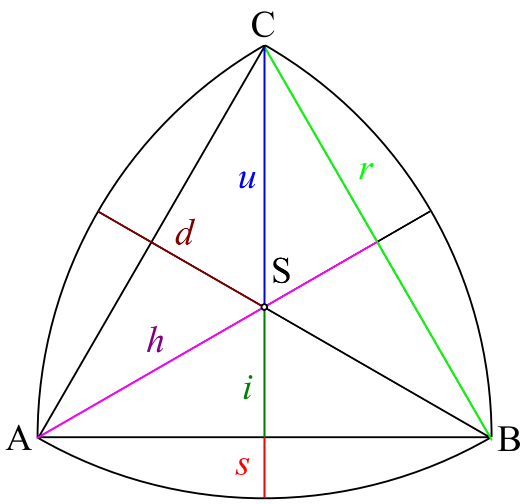
$h = \frac{\sqrt{3}}{2} r$ Dreieckshöhe

$u = \frac{\sqrt{3}}{3} r$ Umkreisradius

$i = \frac{\sqrt{3}}{6} r$ Inkreisradius des Dreiecks

$s = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} r$ Bogenhöhe

$d = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} r$ Inkreisradius des Gleichdicks

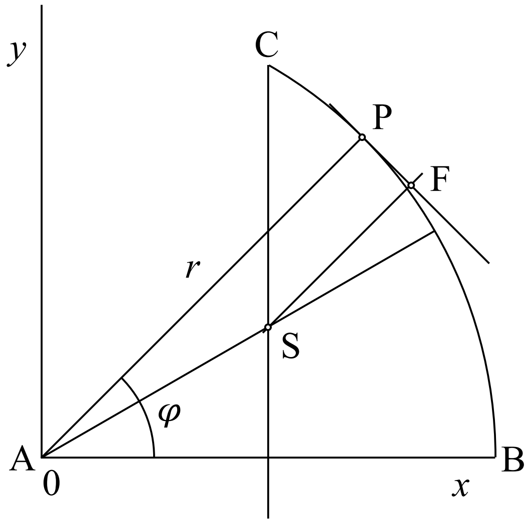


Das Reuleux-Dreieck mit Durchmesser r hat einen Umfang von $3 \cdot (2\pi/6) \cdot r = \pi r$ und eine Fläche von $3 \cdot \pi r^2/6 - 2 \cdot r^2 \cdot \sqrt{3}/4 = \frac{1}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right) r^2$.

Auf Stäben mit Querschnitt in Form eines Reuleux-Dreiecks kann eine Last über eine ebene Unterlage gerollt werden. Solche Stäbe rollen nicht von selbst wie ein Kreiszylinder, weil sich bei der Rollbewegung der Schwerpunkt S (Abb. 3) auf und ab bewegt, aber die Last bleibt auf gleicher Höhe.

Wie hoch über dem Boden befindet sich der Schwerpunkt dieses Gleichdicks als Funktion des Drehwinkels? Wir berechnen dazu den Abstand des Schwerpunkts von der Tangenten als Funktion eines Polarwinkels, siehe Abbildung 4.

Abbildung 4: Koordinaten
Seien A, B und C die Ecken des Dreiecks wie in Abbildung 3 und S der Schwerpunkt. Wir legen das Dreieck in ein kartesisches Koordinatensystem, wobei A(0, 0), B(r, 0) und $C\left(\frac{1}{2}r, \frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$ *die Koordinaten der Ecken sind. Der Schwerpunkt hat dann die Koordinaten* $S\left(\frac{1}{2}r, \frac{\sqrt{3}}{6}r\right)$ *in der Mitte auf 1/3 der Dreieckshöhe.*
Ein allgemeiner Punkt auf dem rechten Kreisbogen hat die Koordinaten $P(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$*, wobei* φ *der Polarwinkel bezüglich Pol bei A und Polarachse AB ist. Dieser Polarwinkel wird uns dazu dienen, die Rollbewegung zu beschreiben.*



Wir berechnen den Abstand $\ell = \overline{FS}$ des Schwerpunkts S in Abbildung 4 von der Tangenten durch P mit Hilfe des Vektorprodukts, wobei wir den Einheitsvektor $\vec{\tau}$ in Richtung $\overrightarrow{PF}$ verwenden.

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} r/2 \\ r\sqrt{3}/6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1/2 - \cos\varphi \\ \sqrt{3}/6 - \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot r$$

$$\vec{\tau} = \frac{\overrightarrow{PF}}{\overline{PF}} = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \ell = \left|\overrightarrow{PS} \times \vec{\tau}\right| = \left|-(1/2 - \cos\varphi)\cos\varphi - (\sqrt{3}/6 - \sin\varphi)\sin\varphi\right| \cdot r$$

$$\ell = \left|1 - \tfrac{1}{2}\cos\varphi - \tfrac{\sqrt{3}}{6}\sin\varphi\right| \cdot r$$

Minimum: $\ell_{\min} = \ell(\pi/12) = \ell(30°) = \left|1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{1}{2}\right| \cdot r = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3} \cdot r = d \approx 0.423\, r \quad \checkmark$

Maximum: $\ell_{\max} = \ell(0) = \left|1 - \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot 0\right| \cdot r = \ell(\pi/6) = \frac{1}{2}r \quad \checkmark$

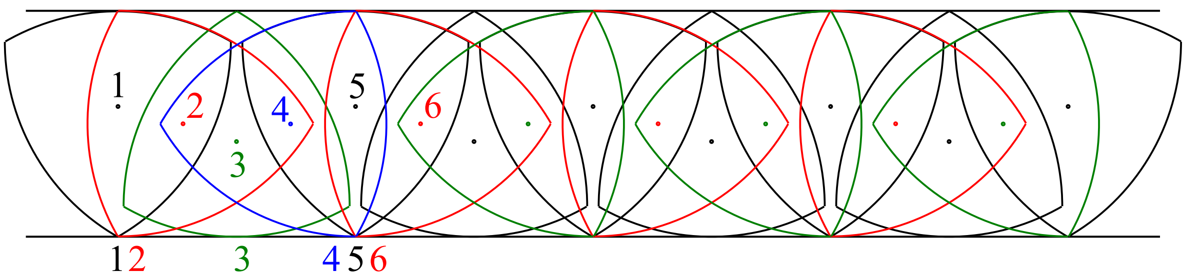


Abbildung 5: Rollendes Reuleux-Dreieck
Das Gleichdick rolle ohne zu rutschen von links nach rechts und berührt dabe immer die obere und untere Leitgerade (Abstand r). Die Bewegung 4-5-6 ist eine Drehung um 120° um die untere Spitze, d.h. der Schwerpunkt (farbig gleich nummerierte Punkte) bewegt sich auf einem Kreis. Die Bewegung 2-3-4 ist ein Abrollen auf dem unteren Bogen um die Bogenlänge $r \cdot \pi/3$*. Der Schwerpunkt bewegt sich auf einer verkürzten Zykloiden, d.h. vollführt die gleiche Bewegung wie ein Punkt auf einer Velospeiche zwischen Nabe und Strasse.*

22. 02. 2022, Lie.