Magnetfelder und Relativität

Martin Lieberherr
MNG Rämibühl

Do. 10. April 2025

Biot-Savart Gesetz

Mit dem Biot-Savart Gesetz lässt sich die magnetische Feldstärke in der Umgebung einer stationären Stromverteilung berechnen.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3} \qquad \text{Biot-Savart Gesetz}$$

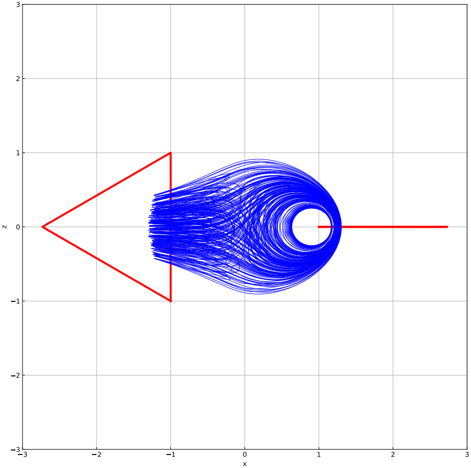
$$\vec{B} = \int_\ell d\vec{B} \qquad \text{Für ein gerades Leiterstück folgt:}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{\ell} \times \vec{r}}{\ell^2 r^2 - \left(\vec{\ell} \cdot \vec{r}\right)^2} \left[\frac{\vec{\ell} \cdot \left(\vec{\ell} - \vec{r}\right)}{\left|(\vec{\ell} - \vec{r})^2\right|} + \frac{\vec{\ell} \cdot \vec{r}}{r} \right]$$

$$\frac{d\vec{s}}{ds} = \frac{\vec{B}}{B} \qquad \text{Differentialgleichung für eine Feldlinie}$$

Diese Differentialgleichung wird numerisch integriert.

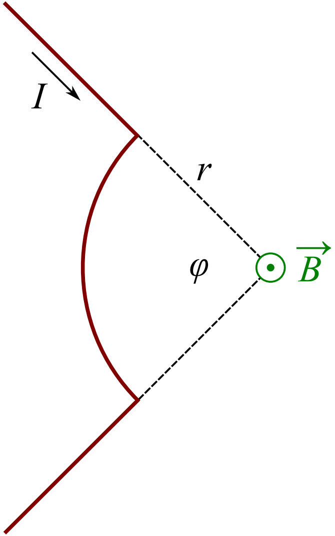
Feldlinien



Teil einer einzigen Feldlinie zwischen zwei verdrehten, dreieckigen Stromschleifen. Feldlinien sind in der Regel keine geschlossenen Kurven.

Python 3.11.10
Spyder 6.0.2
Programmieren gehört zu den Kompetenzen einer Physiklehrkraft!

Biot-Savart via Experiment

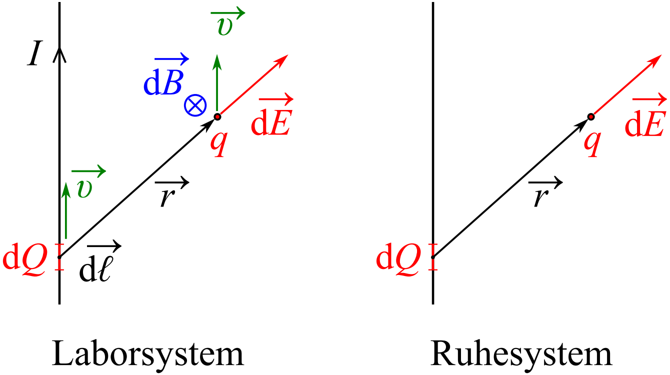


Messung des B-Feldes im Krümmungszentrum eines Kreisbogens mit radialen Zuleitungen (smartphone, phyphox-app)

$B \sim I \qquad B \sim 1/r$
$\vec{B} \perp$ Kreisebene
kein Feld von den Zuleitungen
$B \sim \varphi \rightarrow$ Superpositionsprinzip
Das Gesetz ist bis auf Einheiten und math. Darstellung bestimmt.

$$dB \sim I \cdot \frac{d\varphi}{r} = I \cdot \frac{r\,d\varphi}{r^2} = I \cdot \frac{d\ell}{r^2}$$

Motivation von Biot-Savart via Relativität $\quad v \ll c$



Motivation von Biot-Savart via Relativität

Die elektrische Stromstärke ist gleich der el. Ladungsmenge *dQ* die in der Zeit *dt* durch einen Leiterquerschnitt tritt.

1. Ruhesystem
Die Ladungsmenge *dQ* erzeugt ein elektrisches Feld.

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dQ}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$d\vec{F} = q \cdot d\vec{E} \qquad \text{elektrische Komponente der Lorentzkraft}$$

Motivation von Biot-Savart via Relativität

2. Laborsystem
Die bewegte Ladungsmenge dQ stellt einen elektrischen Strom I dar. Der elektrische Strom generiert ein Magnetfeld dB.

$$d\vec{B} \qquad \text{existiert, siehe Experiment}$$

$$d\vec{B} \propto \vec{v} \times d\vec{E} \qquad \text{Richtung}$$

$$d\vec{B} = \frac{1}{c^2} \cdot \vec{v} \times d\vec{E} \qquad \text{unbestimmte Konstante } c$$

$$[c] = \mathrm{m/s} \qquad \text{wegen der Einheiten}$$

$$d\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times d\vec{B}\,(+..) \qquad \text{magnetische Komp. der Lorentzkraft}$$

Motivation von Biot-Savart via Relativität

3. Vergleich der Beobachtungen

$$I \cdot d\vec{\ell} = \frac{dQ}{dt} \cdot d\vec{\ell} = dQ \cdot \frac{d\vec{\ell}}{dt} = dQ \cdot \vec{v}$$

$$d\vec{B} = \frac{1}{c^2} \cdot \vec{v} \times \vec{E} = \frac{1}{c^2} \cdot \vec{v} \times \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$d\vec{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \cdot (dQ \cdot \vec{v}) \times \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \cdot \left(I \cdot d\vec{\ell} \right) \times \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3} \qquad \text{wobei} \quad \mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} = \text{const}$$

Aus einem elektrischen entsteht ein magnetisches Feld.
(Maxwell IV, Weber-Kohlrausch)

Relativität der Kreisbewegung

Eine Punktladung kann sich in einem homogenen Magnetfeld gleichförmig auf einem Kreis bewegen. Bei langsamer Bewegung gilt in guter Näherung klassische, newtonsche Mechanik.

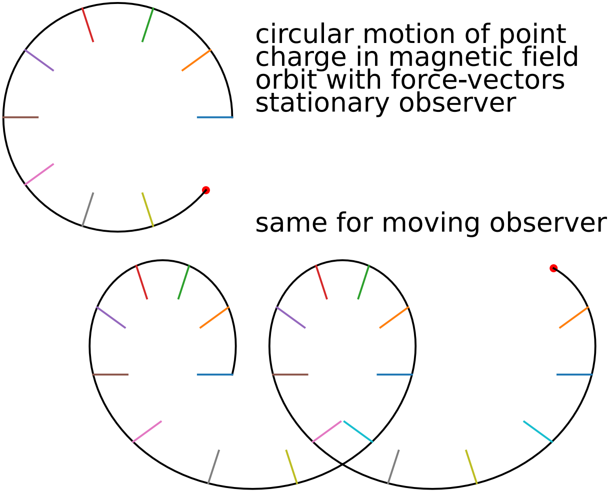
$$\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}_Z$$

$$q \cdot \vec{\upsilon} \times \vec{B} = -\frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\upsilon^2}{r} \cdot m$$

$$r = \frac{m\upsilon}{qB} \quad \text{Zyklotronradius}$$

Was wird daraus, wenn wir das Bezugsystem wechseln?
→ Galilei-Transformation (boost) parallel zur Kreisebene

Relativität der Kreisbewegung im Magnetfeld



(Python)

Relativität der Kreisbewegung im Magnetfeld

Die Kreisbewegung im homogenen Magnetfeld ist gleichförmig. Die magnetischen Kräfte stehen senkrecht zur Bahn und verrichten keine Arbeit.

Die Bewegung entlang der verlängerten Zykloiden ist ungleichförmig. Die Kräfte haben Komponenten tangential zur Bahn. Sie verrichten Arbeit und verändern die kinetische Energie. Wie ist das möglich?

klassische Relativitätstheorie $\quad v \ll c$

1. Beobachter ruht im Kreiszentrum

$$m\vec{a}_0 = q \cdot \vec{v}_0 \times \vec{B}_0$$

2. Das Kreiszentrum bewegt sich relativ zum Beobachter
Die Kraft muss eine elektrische Komponente haben.

$$m\vec{a}_1 = q\vec{E}_1 + q \cdot \vec{v}_1 \times \vec{B}_1$$

3. Vergleich der Beobachtungen

$$m\vec{a}_1 = m\vec{a}_0 \qquad \vec{B}_1 = \vec{B}_0 \qquad \vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{v}_{\mathrm{rel}}$$
$$\Rightarrow \vec{E}_1 + \vec{v}_{\mathrm{rel}} \times \vec{B}_1 = \vec{0}$$

Der Wechsel des Bezugsystems transformiert ein magnetisches teilw. in ein elektrisches Feld: Induktion ist ein relativistischer Effekt

Spezielle Relativitätstheorie

Die Lorentzkraft ist Lorentz-invariant.

$$q\vec{E}_0 + q \cdot \vec{v}_0 \times \vec{B}_0 = \frac{d\vec{p}_0}{dt_0}$$

$$q\vec{E}_1 + q \cdot \vec{v}_1 \times \vec{B}_1 = \frac{d\vec{p}_1}{dt_1}$$

Alle Grössen mit Ausnahme von q hängen von der Wahl des Inertialsystems ab. Mit der Lorentzinvarianz der Lorentzkraft kann das Induktionsgesetz erklärt werden.

Die Laplace- oder Biot-Savart Kraft $\vec{F} = I \cdot \vec{\ell} \times \vec{B}$ stammt nicht von Lorentz, ist viel älter und nicht invariant unter Galilei- oder Lorentztransformation.

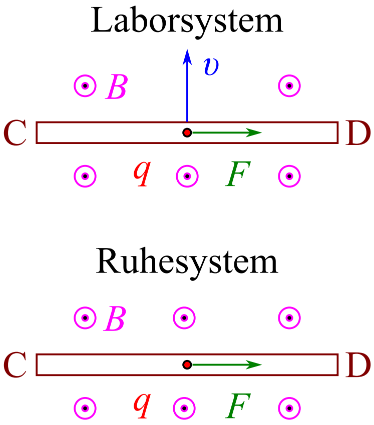
Ende

"The rotating armatures of every generator and every motor in this age of electricity are steadily proclaiming the truth of relativity theory to all who have ears to hear." Leigh Page

Leigh Page "A Derivation of the Fundamental Relations of Electrodynamics from Those of Electrostatics".
American Journal of Science 34: 57–68, (Jul 1912).

Die dritte und vierte der Maxwellgleichungen können aus den ersten beiden mit Hilfe der speziellen Relativitätstheorie hergeleitet werden. Die SRT beruht seit über hundert Jahren nicht mehr auf der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Die SRT ist fundamentaler als die klassische Elektrodynamik.

Induktion relativistisch: Draht fährt durch Magnetfeld



1. Laborsystem

$$F = q\upsilon B$$

2. Ruhesystem

$$F = qE$$

3. Vergleich

$$qE = q\upsilon B$$

$$E = \upsilon B$$

$$E \cdot s_{\text{CD}} = s_{\text{CD}}\upsilon B$$

$$U_{\text{ind}} = s\upsilon B$$

Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$