Zwänzgerli

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, Rämistr. 54, 8001 Zürich

Einleitung

Das Physikpraktikum eignet sich wunderbar dazu, Schülerinnen und Schülern einige Grundbegriffe der Statistik beizubringen. Ich lasse sie beispielsweise die sekundlich registrierten Zerfälle einer radioaktiven Quelle statistisch auswerten. Damit ich selbst den Taschenrechner (TI-85) kennen lernte und ein anderes Beispiel zum Zeigen hatte, untersuchte ich die Massenverteilung der 20-Rappen-Münzen in meinem Waschkässeli.

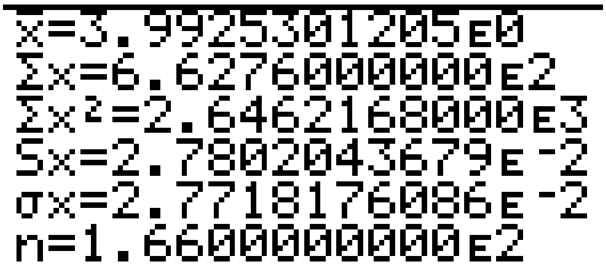
Theorie

Es ist vernünftig zu erwarten, dass die Münzmassen normalverteilt[1] sind:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{(Glockenkurve)}$$

Experiment

Mein Kässeli enthielt 166 Zwänzgerli. Die Massen bestimmte ich durch eine elektronische Laborwaage mit 0.01 g Auflösung. Jahrgänge und Massen tippte ich als Listen in den Rechner, einen TI-85 von Texas Instruments. Auch die Auswertung erfolgte fast vollständig auf diesem Rechner (Fig. 1 bis 4).



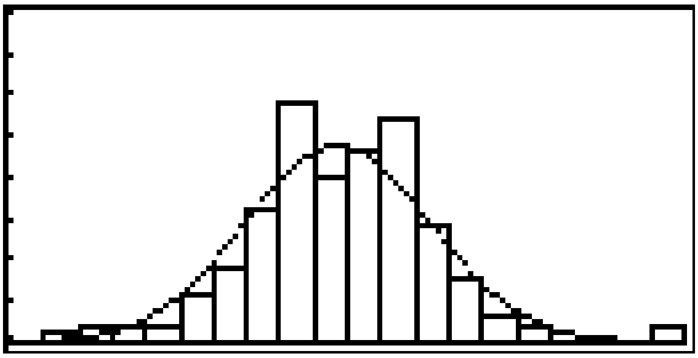
Figur 1: Statistik der Münzmassen. Die Anzeige des Taschenrechners (TI-85) wurde mit TI-Graph-Link auf den Computer übertragen.

Der Rechner lieferte den Mittelwert 3.993 g und die empirische Standardabweichung 0.0278 g. Mit diesen Werten liess ich eine Glockenkurve darstellen und das Histogramm (Häufigkeitsdiagramm mit Säulen) dazu zeichen (Fig. 2). Die programmierte Glockenkurve hatte auf dem TI-85 folgende Gestalt:

y1=166*0.01/√(2*π)/0.0278*e^(-0.5*((x-3.993-0.005)/0.0278)^2)

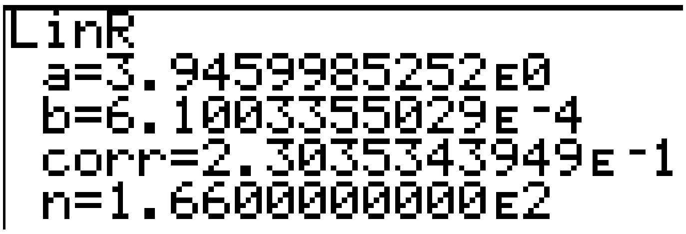
166 ist die Zahl der Münzen und 0.01 g die Klassenbreite. Diese Zahlen sind nötig, da die Werte im Histogramm nicht auf 100 % normiert wurden. Die zusätzliche Verschiebung der Glockenkurve um 0.005 g, eine halbe

Klassenbreite, ist rein kosmetischer Natur, denn die Säulen werden nicht um den Klassenwert zentriert sondern vom Klassenwert nach rechts gezeichnet.

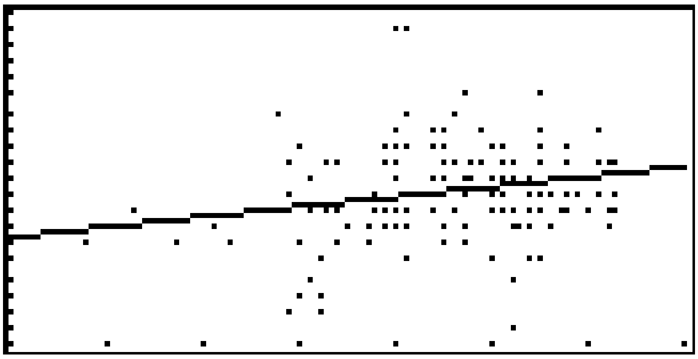


Figur 2: Histogramm der Münzmassen mit Gauss'scher Glockenkurve
Abszisse 3.90 g bis 4.10 g
(Klassenbreite 0.01 g)
Ordinate 0 bis 40 (Häufigkeit)

Alte Münzen sind oft abgegriffen. Eine lineare Regression der Münzmasse gegen den Jahrgang schien dies zu bestätigen (Figuren 3 und 4). Die Münzen umfassten die Jahrgänge 38 bis 93.



Figur 3: Lineare Regression
Geradengleichung y = a + b x
x: Jahrgang (Jahre nach 1900)
y: Münzmasse in Gramm



Figur 4: Münzmasse gegen Jahrgang, Messdaten mit Regressionsgerade
Abszisse 1930 bis 2000
Ordinate 3.90 g bis 4.10 g

Diskussion

Mit einem graphischen Taschenrechner kann man wunderbar Statistik betreiben, ein weiteres Argument für den Einsatz graphikfähiger Taschenrechner im Unterricht. Ich halte es für sehr wichtig, dass Schülerinnen und Schüler die Daten, welche sie statistisch auswerten sollen, auch selbst gewinnen. Vor allem bei kleinen Stichproben können sich Erwartung und Experiment augenfällig unterscheiden. Verwendet man nur geschönte Daten aus irgendwelchen Büchern bringt man sich um einen wichtigen Teil des

Experiments: die Diskussion des Resultats. Die Bewertung des Resultats ist nur sinnvoll, wenn man den Versuch genau kennt.

In Figur 1 sind Mittelwert und Streuung angegeben. Innerhalb welcher absoluter Fehlerschranken liegt nun die Masse eines Zwänzgers? Üblicherweise nimmt man das zwei- bis dreifache der empirischen Standardabweichung, also z.B. $2 \cdot 0.0278$ g = 0.056 g. Es macht keinen Sinn, die Fehlerschranke genauer als mit ein bis zwei wesentlichen Ziffern anzugeben, denn sie enthält immer ein gewisses Mass an Willkür (Sicherheitsbedürfnis). Zudem haben wir den systematischen Fehler noch nicht berücksichtigt. Schüler stellen manchmal die Waage vor der Messung nicht auf Null. Dann ist natürlich die schönste Statistik für die Katz. Münzrollen kann man wägen. Bis zu welcher Rollenmasse kann der Geldwert noch verlässlich berechnet werden? Hier könnte man auf den Unterschied zwischen den Fehlern von Einzelmessung und Mittelwert eingehen.

Wie man in Figur 2 sieht, passt die Glockenkurve recht schön zum Histogramm. Die Übereinstimmung ist aber nicht perfekt. Der Mittelwert ist z.B. nicht der häufigste Wert. Man könnte sich nun fragen, wie gross die Zahl der Messwerte und wie fein die Klasseneinteilung sein müsste, damit man die Unterschiede in der Graphik nicht mehr erkennen kann. (Ich habe z.B. noch nie ein Histogramm der Resultate eines gross angelegten Intelligenztests gesehen, immer nur Glockenkurven. Ich sähe gerne in einem Bild, wie gut die Intelligenzquotienten normalverteilt sind.) Die Abweichungen der Münzmassen von der Normalverteilung können natürlich auch anders beurteilt werden, indem man z.B. höhere Momente der Verteilung berechnet oder geeignete statistische Tests ausführt.

Ältere Münzen sind im Mittel leichter als neue. Aus der linearen Regression erhält man einen mittleren Massenverlust von 0.61 Milligramm pro Jahr (Fig. 3). Das ist recht wenig. Der Korrelationskoeffizient beträgt nur 0.23. Durch Spielen mit den Daten kann man ein Gefühl dafür erlangen, was die trockenen Begriffe "signifikant" oder "nicht signifikant" bedeuten.

Literatur

[1]DMK/DPK Formeln und Tafeln, Orell Füssli Verlag