Zielwurf

Martin Lieberherr
Mathematisch Naturwissenschaftliches Gymnasium Rämibühl, 8001 Zürich

"So sprach er und warf, und das Geschoß lenkte Athene
Auf die Nase neben dem Auge, und es durchbohrte die weißen Zähne
Und ihm schnitt ab die Wurzel der Zunge das unaufreibbare Erz,
Und die Spitze fuhr ihm heraus am untersten Kinn."
Homer "Ilias" 5. Gesang, Verse 290-293, Übers. W. Schadewaldt

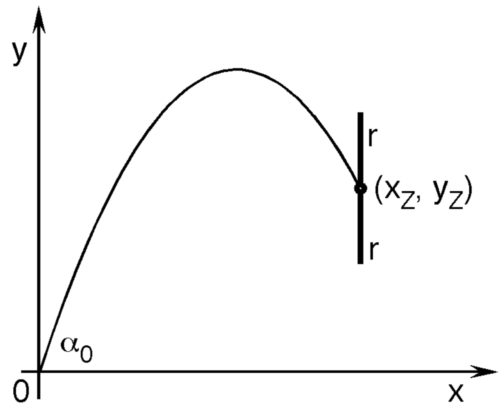
Einleitung

Irgendwo hatte ich mal gelesen, der grosse Unterschied zwischen Mensch und Affe sei nicht die Sprache, sondern der einarmige Zielwurf. Während Affen ihren Feinden noch nachrennen müssen, schmeissen wir ihnen einen Stein an den Kopf (oder wie oben Diomedes eine Lanze, soviel zur griechischen Kultur). Wurfbewegungen sind ein klassisches Thema des Physikunterrichts. Ich will für einmal weg von der "mathematisch vollständigen" Analyse hin zur Visualisierung.

Modellierung

Ein Darts-Spieler möchte aus Distanz die Scheibe treffen. Er kann Abwurfwinkel α_0 und Abwurfschnelligkeit υ_0 wählen. Geübte Werfer finden anscheinend eine Kombination aus Abwurfwinkel und Schnelligkeit, wo kleine Fehler sich kaum auswirken. Welche Kombination könnte das sein?
Der Abwurf liege im Nullpunkt eines kartesischen Koordinatensystems, siehe Abb. 1. Das Ziel ist die Dartscheibe. Das Zentrum der Scheibe habe die Koordinaten (x_Z, y_Z). Die vertikale Scheibe mit Radius r muss von vorne getroffen werden, es kommen also Direkt- und Bogenschüsse in Frage. Das Ziel gelte als getroffen, wenn die Wurfparabel die Scheibe durchquert. Der Wurfpfeil sei punktförmig. Wir betrachten nur die Bewegung in einer vertikalen Ebene. Der Luftwiderstand sei vernachlässigt.

Abbildung 1: Typische Wurfparabel mit Ziel (Dartscheibe von der Seite).
Der Abwurf erfolgt im Nullpunkt des Koordinatensystems, das Ziel hat Koordinaten (x_Z, y_Z) und vertikale Ausdehnung ±r.



Simulation

Ob ein Wurf mit Startwinkel α_0 und Startschnelligkeit υ_0 trifft, lässt sich ganz einfach mit der Wurfparabelgleichung herausfinden:

$$y = \tan\alpha_0 \cdot x - \frac{g}{2\upsilon_0^2 \cos^2\alpha_0} \cdot x^2$$

Auf der $(\alpha_0;\ \upsilon_0)$ – Parameterebene kann man für jeden Punkt berechnen, ob $y_Z - r \le y(x_Z) \le y_Z + r$ ist, d.h. ob die Scheibe getroffen wurde. Falls ja, wird das zugehörige Pixel im Bild schwarz gefärbt, siehe Abbildung 2. Für die Rechnung wurde x_Z = 2.4 m, y_Z = 0 und r = 0.17 m gesetzt, was etwa der Situation beim Dartwerfen entspricht. Die minimale Schnelligkeit, mit der man das Scheibenzentrum treffen kann, gehört mit dieser Wahl der Parameter zum Abwurfwinkel $\alpha_0 = 45°$ und beträgt $\upsilon_0 = \sqrt{x_Z g} = \sqrt{2.4\ \text{m} \cdot 9.81\ \text{m/s}^2} = 4.9\ \text{m/s}$.

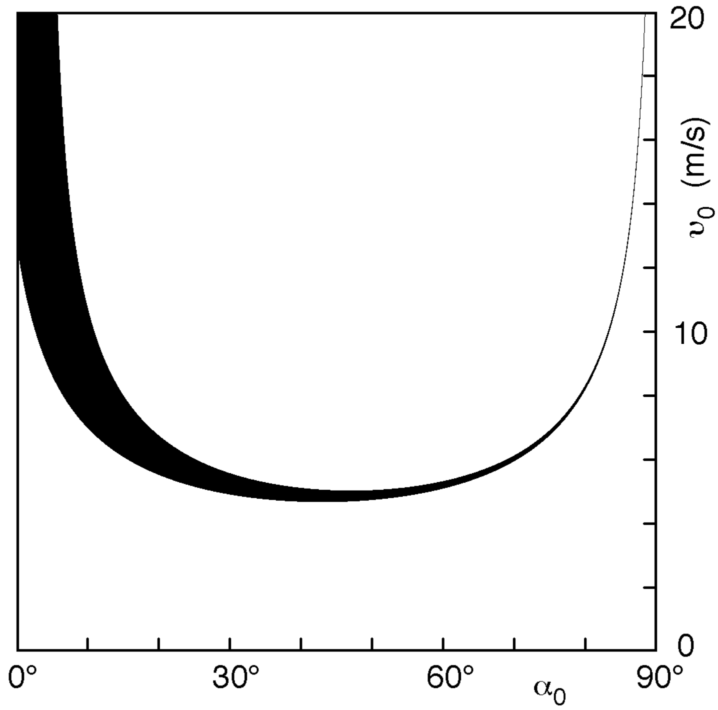


Abb. 2: Anfangswerte aller Würfe, welche die Dartscheibe treffen. Bei kleinen Abwurfwinkeln α_0 (Direktschuss) muss mit hoher Schnelligkeit υ_0 geworfen werden, aber sowohl der Winkel als auch die Schnelligkeit müssen nicht sehr genau bekannt sein. Bei grossen Abwurfwinkeln müsste die Schnelligkeit sehr genau stimmen um zu treffen. In der Nähe des Abwurfwinkels 45° darf man sich einen grossen Winkelfehler erlauben, aber die Anfangsschnelligkeit muss in einem relativ engen Bereich liegen.

Abbildung 2 legt nahe, dass man einen flachen Direktschuss wählt. Genau das ist es ja auch, was in der Spielpraxis gemacht wird.

Nachlese

Hängt die Scheibe höher oder tiefer, so liegt der Abwurfwinkel, der zur minimalen Abwurfschnelligkeit gehört, natürlich nicht mehr bei 45°. Die Lösungsmenge (schwarzer Bereich in Abb. 2) sieht aber immer noch ähnlich aus, nur horizontal gedehnt oder komprimiert.

Wer wissen möchte, wie die Lösungsmenge aussieht, wenn das Ziel nicht vertikal sondern horizontal ausgerichtet ist, z.B. wie der Korb im Basketball, kann sich einen analogen Artikel unter www.dpk.ch/Material anschauen.