

# Wurfellipse

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, lieberhm@mng.ch

## 1 Einleitung

An einer Sitzung bemerkte ein Kollege, dass es ja gar keine Wurfparabeln gäbe, denn die Bahnen wären Stücke von keplerschen Ellipsen. Das ist wohl wahr, wenn man stark idealisiert (kugelsymmetrische Erde, kein Luftwiderstand, keine Erdrotation etc.), aber ist der Unterschied zwischen Wurfparabel und “Wurfellipse” auch bedeutsam? Für kleine Startgeschwindigkeiten sollte die Ellipse in eine Parabel übergehen. Die Ellipse kann aus den Startwerten (Betrag der Anfangsgeschwindigkeit  $v_E$  an der Erdoberfläche und Winkel  $\alpha_E$  gegen die Tangentialebene an der Abwurfstelle) berechnet werden. Lässt sich diese Ellipse einfach und schön darstellen? Gibt es wie bei der Wurfparabel im homogenen Schwerefeld eine hübsche Einhüllende, wenn man die Wurfellipsen mit verschiedenen Abschusswinkeln zeichnet?

## 2 Horizontaler Wurf

Zum Aufwärmen betrachten wir den horizontalen Wurf mit kleiner Anfangsgeschwindigkeit (Abbildung 1).

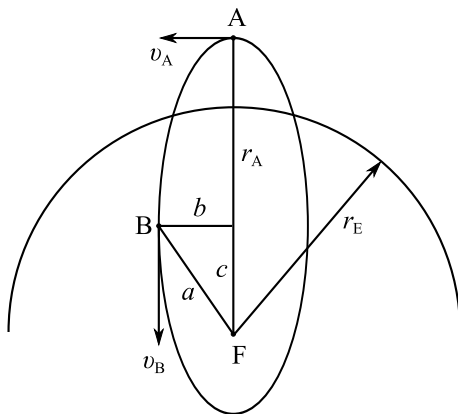


Abbildung 1: Der horizontale Wurf startet im Apogäum A der Bahnellipse mit Geschwindigkeit  $v_A$ . Der Startpunkt hat Abstand  $r_A > r_E$  vom Schwerpunkt F der Erde. Die Erde hat Radius  $r_E$ . Der irdische Schwerpunkt ist ein Brennpunkt F der Ellipse. Um die Ellipse zu beschreiben, wollen wir die grosse Halbachse  $a$  und die kleine Halbachse  $b$  bestimmen. Die Zeichnung ist nicht massstäblich.

Die potentielle Energie eines Wurfkörpers der Masse  $m$  im Abstand  $r$  vom Schwerpunkt des Zentralkörpers mit Masse  $M$  ist  $-GMm/r$ , wobei  $G$  die newtonsche Gravitationskonstante ist. Die Gesamtenergie ist  $-GMm/(2a)$ . Wir können also mit Hilfe des Energiesatzes aus den Startwerten die grosse Halbachse berechnen:

$$\frac{1}{2}v_A^2 - \frac{GM}{r_A} = -\frac{GM}{2a} \Rightarrow a = \frac{r_A}{2} \cdot \left(1 - \frac{r_A v_A^2}{2GM}\right)^{-1} \quad (1)$$

Ebenso können wir die Geschwindigkeit  $v_B$  im Abstand  $a$  vom Brennpunkt F berechnen (Abbildung 1).

$$\frac{1}{2}v_A^2 - \frac{GM}{r_A} = \frac{1}{2}v_B^2 - \frac{GM}{a} \Rightarrow v_B^2 = \frac{2GM}{r_A} \cdot \left(1 - \frac{r_A v_A^2}{2GM}\right) \quad (2)$$

Der Nebenscheitel B hat den Abstand  $b$  vom Ellipsenmittelpunkt. Die kleine Halbachse  $b$  bestimmen wir mit Hilfe des zweiten keplerschen Gesetzes (Drehimpulserhaltung):

$$r_A v_A = b v_B \Rightarrow b = \frac{r_A v_A}{v_B} \quad (3)$$

Diese Bahnellipse, deren Hauptscheitel A wir in den Nullpunkt eines kartesischen Koordinatensystems legen, ist der Graph folgender Funktion:

$$y = a \cdot \left( \sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}} - 1 \right) \rightarrow y = -\frac{x^2 g}{2v_A^2} + \dots \quad (4)$$

Die Ellipsenfunktion geht für kleine  $x$  und kleine  $v_A$  in die übliche Darstellung der Parabel für den horizontalen Wurf im homogenen Schwerfeld über, wenn man die Abkürzung  $g = GM/r_A^2$  (Fallbeschleunigung, Gravitationsfeldstärke im Punkt A) verwendet. Beim Übergang von der Wurfellipse im newtonschen Gravitationsfeld zur Wurfparabel im homogenen Schwerfeld sind noch einige Feinheiten zu beachten. Wer sich dafür interessiert, möge sich an Am. J. Phys. 73 (June 2005), 516 orientieren.

### 3 Schiefer Wurf

Die Wurfellipse ist eine Ellipse mit grosser Halbachse  $a$  und kleiner Halbachse  $b$ , deren einer Brennpunkt F mit dem Schwerpunkt der Erde zusammen fällt, siehe Abbildung 2. In Polarkoordinaten wird sie üblicherweise durch die numerische Exzentrizität  $\varepsilon$  sowie das Quermass  $p$  parametrisiert:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_E)} \quad p = b^2/a = a \cdot (1 - \varepsilon^2) \quad \varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2} \quad (5)$$

Die Ellipse ist gegen die Polachse (in Abb. 2 aufwärts) um den Winkel  $\varphi_E$  gedreht. Das Ziel der Rechnung ist,  $a$ ,  $\varepsilon$  und  $\varphi_E$  aus den Abwurfsdaten  $v_E$  und  $\alpha_E$  zu bestimmen.

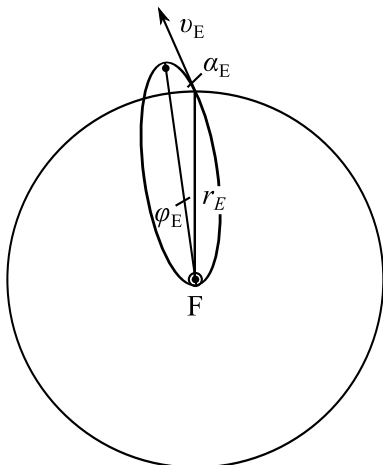


Abbildung 2: Die Wurfellipse startet im Abstand  $r_E$  (Erdradius) unter dem Winkel  $\alpha_E$  zur Erdoberfläche mit Geschwindigkeit  $v_E$ . Die Ellipse hat den einen Brennpunkt F im Schwerpunkt der Erde. Die lange Achse der Ellipse ist um den Winkel  $\varphi_E$  gegen die Verbindungslinie Brennpunkt-Abwurfstelle geneigt.

Mit Hilfe des Energiesatzes können wir die grosse Halbachse  $a$  der Wurfellipse berechnen:

$$\frac{1}{2}mv_E^2 - \frac{GMm}{r_E} = -\frac{GMm}{2a} \Rightarrow a = \frac{r_E}{2} \cdot \left( 1 - \frac{r_E v_E^2}{2GM} \right)^{-1} \quad (6)$$

Die grosse Halbachse legt über das dritte keplersche Gesetz die Umlaufzeit  $T$  fest (wenn der Wurfkörper denn einen ganzen Umlauf machen könnte).

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad (7)$$

Die Exzentrizität können wir über das zweite keplersche Gesetz bestimmen: Die Verbindungslinie Erdmittelpunkt-Wurfkörper überstreicht in gleichen Zeiten  $dt$  gleiche Flächen  $dA$  respektive während der Umlaufzeit  $T$  die ganze Ellipsenfläche  $\pi ab$ :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r_E v_E \cos \alpha_E = \frac{\pi ab}{T} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{T} \quad (8)$$

Eliminieren wir mit Hilfe des dritten keplerschen Gesetzes die Umlaufzeit, so erhalten wir

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{(r_E v_E \cos \alpha_E)^2}{GMa}} \quad (9)$$

Den Kippwinkel  $\varphi_E$  der Ellipse erhalten wir aus Gleichung (5) mit  $r = r_E$  und  $\varphi = 0$ . Ich habe davon Abstand genommen, alle diese Formeln zusammenzuführen, um eine geschlossene Darstellung der Wurfellipse als Funktion von  $r_E$ ,  $v_E$ ,  $\alpha_E$  und  $GM$  zu erhalten.

## 4 Hüllkurve

Zeichnet man viele Wurfellipsen mit gleicher Energie und gleichem Startort übereinander, so ergibt sich eine Hüllkurve, siehe Abbildung 3. O. Emersleben (Math. Nachr., Berlin 3 (1949), 62-70) und Th. Pöschl (Einführung in die analytische Mechanik, Karlsruhe, 1949) haben unabhängig von einander bewiesen, dass die Hüllkurve eine Ellipse ist. Diese Hüllellipse hat den einen Brennpunkt im Schwerpunkt der Erde und den anderen am Abschussort auf der Erdoberfläche.

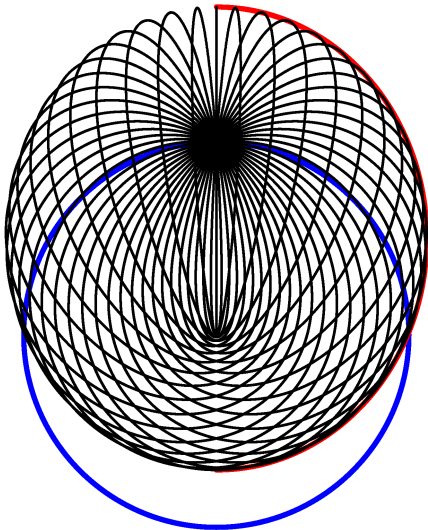


Abbildung 3: Lässt man viele Wurfellipsen mit gleicher Anfangs-Bahngeschwindigkeit  $v_E$  und verschiedenen Abschusswinkeln im Intervall  $0 \leq \alpha_E \leq \pi$  übereinander zeichnen, so sieht man eine Hüllkurve. Die Hüllkurve ist eine Ellipse mit dem einen Brennpunkt im irdischen Schwerpunkt und dem anderen am Abschussort. Die Hüllkurve ist in der rechten Hälfte eingezeichnet. Der Kreis stellt die Erde dar. Die Bahnellipsen sind vollständig gezeichnet, aber die Wurfkörper können die Erde natürlich nicht durchdringen.

Die Hüllellipse hat die Hauptscheitel bei  $x_A$  und  $x_P$ , wobei die  $x$ -Achse aufwärts orientiert ist und den Nullpunkt im irdischen Schwerpunkt hat. Die Koordinate des oberen Hauptscheitels folgt aus dem Energiesatz für den vertikalen Wurf ( $\alpha_E = \pi/2$ ). Bei  $x_A$  ist die Geschwindigkeit Null und die Gesamtenergie ist gleich der potentiellen Energie:

$$-\frac{GM}{2a} = \frac{-GM}{x_A} \Rightarrow x_A = 2a \quad (10)$$

Die Koordinate  $x_P$  des unteren Hauptscheitels stimmt mit dem Perigäum des horizontalen Wurfs ( $\alpha_E = 0$ ) überein. Das Apogäum des horizontalen Wurfs befindet sich bei  $x = r_E$ . Da auch diese Ellipse eine grosse Achse der Länge  $2a$  hat, ist der untere Hauptscheitel der Hüllellipse bei  $x_P = r_E - 2a < 0$ .

Die Hüllellipse hat also die grosse Halbachse  $a_H = (x_A - x_P)/2 = 2a - r_E/2$  sowie den Mittelpunkt bei  $x = r_E/2 = c_H$  (lineare Exzentrizität). Da der Brennpunkt der Hüllellipse im Schwerpunkt der Erde liegt, folgt für die kleine Halbachse  $b_H^2 = a_H^2 - c_H^2$ . Der zweite Brennpunkt der Hüllellipse liegt bei  $x = 2c_H = r_E$  an der Abwurfstelle.

4. Januar 2015, Lie.