

Der Wasserstrahl

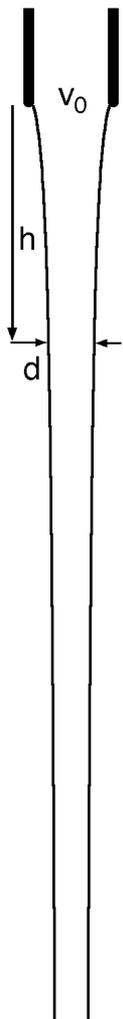
Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, Zürich, 13. Aug. 1994

Einleitung

Auf der Suche nach einer alltäglichen Anwendung der Kontinuitätsgleichung bin ich auf den laufenden Wasserhahn gestossen. Jedermann weiss, dass der Durchmesser des Strahls nach unten abnimmt. Dieser Strahldurchmesser lässt sich mit wenigen Annahmen berechnen. (Voraussetzung ist natürlich, dass man einen schönen, turbulenz- und blasenfreien Strahl hat). Die Schüler könnten anhand von Messdaten die Hypothese testen und deren Genauigkeit diskutieren.

Theorie

Figur 1:



Wasser fliesse laminar mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 aus einem runden Rohr vertikal nach unten (Fig. 1). Die Kontinuitätsgleichung besagt, dass im stationären Fall Vertikalgeschwindigkeit v mal Querschnittsfläche $d^2/4$ entlang des Strahls konstant sein müssen, d.h. $v_0 d_0^2/4 = v d^2/4$. Die grösste Näherung steckt im folgenden Ansatz: Das Wasser habe nach der Fallhöhe h die Geschwindigkeit $v = (v_0^2 + 2gh)^{1/2}$, d.h. es befinde sich im freien Fall. Dieser Ansatz vernachlässigt u.a. Effekte der Oberflächenspannung. Aus den genannten Beziehungen lässt sich v eliminieren und man erhält:

$$d = d_0 (1 + 2gh / v_0^2)^{-1/4} = d_0 (1 + h / h_0)^{-1/4} \quad \text{mit } h_0 = v_0^2 / 2g .$$

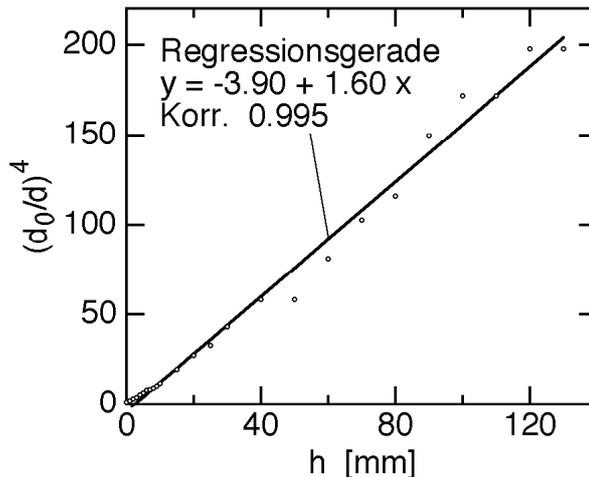
Falls diese einfache Theorie stimmt, müsste $(d_0 / d)^4 = 1 + h / h_0$ gelten, d.h. in einer graphischen Darstellung von $(d_0 / d)^4$ gegen h müsste eine Gerade erscheinen.

Experiment

Ich fotografierte mit Blitzlicht einen laufenden Wasserhahn zusammen mit einem Massstab auf Diafilm. In der Projektion konnte ich den Strahl ausmessen, ein Beispiel (Tab. 1) mit graphischer Auswertung (Fig. 2 und 3) ist unten wiedergegeben. Das Experiment bestätigt die Theorie zumindest qualitativ, was angesichts der groben Näherungen doch erstaunlich ist.

h [mm]	d [mm]
0	10.5
1	9
2	8
3	7.6
4	7
5	6.6
6	6.3
7	6.2
8	6.1
9	5.9
10	5.7
15	5
20	4.6
25	4.4
30	4.1
40	3.8
50	3.8
60	3.5
70	3.3
80	3.2
90	3
100	2.9
110	2.9
120	2.8
130	2.8

Tabelle 1: Fallhöhe h und Strahldurchmesser d.

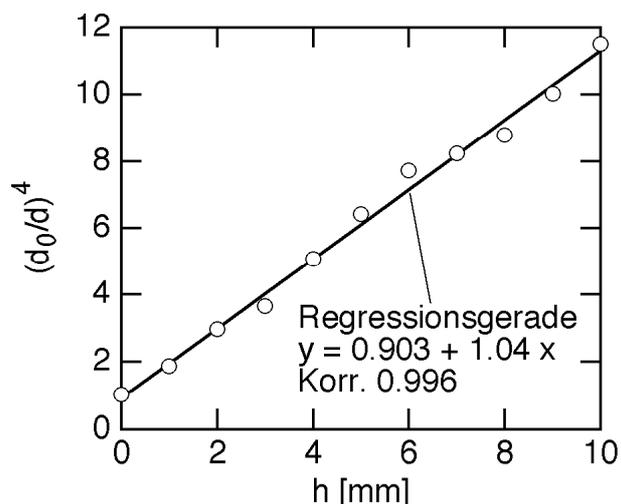


Figur 2: Darstellung der Messwerte aus Tab. 1 mit $d_0 = 10.5$ mm, zusammen mit einer Regressionsgeraden.

Leider schneidet die Regressionsgerade die Ordinate nicht bei 1. Dieser Mangel lässt sich jedoch beheben, wenn man sich auf die Messdaten in der Nähe des Strahlanfangs beschränkt (Fig. 3.). Aus der Steigung der Regressionsgeraden ergibt sich $h_0 = (1.04 \text{ m}^{-1})^{-1}$ und $v_0 = (2gh_0)^{1/2} = 0.137 \text{ m/s}$. Falls man einen stabilen Strahl hat, kann man diesen vernünftigen Wert durch eine Ausflussmessung testen.

Schlussfolgerungen

In einem Schülerexperiment könnte man folgendermassen vorgehen: Die Schüler fotografieren erst einige Strahle und entwickeln die Bilder selbst. Sie lernen so die einem Strahl innewohnende Schönheit kennen und gewinnen Bilder, die sie auswerten können. Es ist aber darauf zu achten, dass man bei der Auswertung weit weg von jener Stelle bleibt, wo sich der Strahl in einzelne Tropfen auflöst. Das sieht zwar hübsch aus, verlässt aber den Gültigkeitsbereich unserer einfachen Theorie. Steht man unter Zeitdruck, so kann man vorbereitete Bilder austeilen und die Schüler darüber arbeiten lassen.



Figur 3: Ausschnitt aus Figur 2 mit neu berechneter Regressionsgerade.