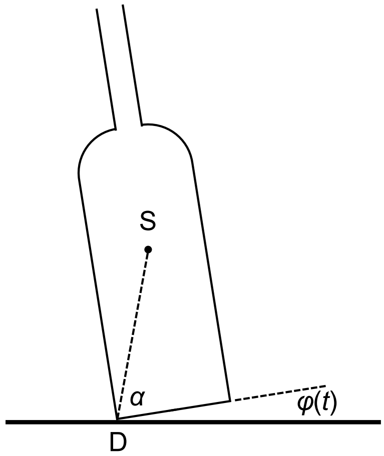
Wackelschwingung

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, lieberhm@mng.ch

1 Einleitung

Was ist eine Schwingung? In einem Schulbuch steht “Eine Schwingung ist eine zeitlich periodische Änderung physikalischer Grössen”. Diese “Definition” trifft nicht einmal auf die gedämpfte Schwingung – einen sehr häufigen Fall – zu! Statt die Schulklassen mit überflüssigen Definitionen einzudecken, wäre es wohl besser gewesen, eine Auswahl an Bewegungen vorzuführen, die typische Eigenschaften von Schwingungen zeigen. Auf diese Weise wird vermieden, spezielle Charakteristiken der harmonischen Schwingung fälschlich auf alle Schwingungen zu verallgemeinern. Die folgende Schwingung lässt sich leicht einer Schulklasse demonstrieren (die Bewegung, nicht die Rechnung): Wird eine leere Weinflasche leicht angestossen, siehe Abbildung 1, so vollführt sie eine gedämpfte Wackelbewegung. Die Frequenz nimmt mit abnehmender Amplitude zu. Da Flaschen aber leicht rutschen (Papier unterlegen!) oder in Drehung versetzt werden, habe ich einen ‘Wackler’ aus Legosteinen gebaut und dessen Bewegung experimentell untersucht.



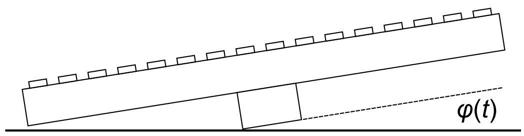


Abbildung 1: Links: Eine versehentlich angestossene Flasche wackelt. Sei $\varphi(t)$ der momentane Kippwinkel um die Drehachse D und α der Winkel Flaschenboden-Drehachse-Schwerpunkt S. Die Bewegung laufe in einer vertikalen Ebene ab und sei links/rechts symmetrisch.
Oben: Ein ‘Lego-Wackler’ schwingt kontrollierter und kann durch Aufstecken weiterer Bausteine verändert werden.

2 Theorie

Die Bewegung der Flasche um die momentane, feste Drehachse, siehe Abbildung 1, gehorcht der Differentialgleichung “Trägheitsmoment J mal Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ ist gleich dem Drehmoment M”, siehe Gleichung (1). Das Drehmoment ist das Gewicht mg der Flasche multipliziert mit dem Hebelarm $\overline{DS}\cos(\alpha+\varphi)$, d.h. mit dem horizontalen Abstand von D und S, siehe Gleichung (2).

$$M = J\ddot{\varphi} \tag{1}$$

$$-mg\overline{DS}\cos(\alpha+\varphi) = J\ddot{\varphi} \tag{2}$$

Gleichung (2) ist äquivalent zu jener des mathematischen Pendels. Sie wird in (3) aber anders als üblich um den Winkel $\varphi = 0$ resp. $\alpha \neq 0$ linearisiert. Die Lösung $\varphi(t)$ der vereinfachten Bewegungsgleichung (4) für eine Halbschwingung ist ein Cosinus hyperbolicus mit zwei freien Parametern (a und t_0), siehe Gleichung (5).

$$J\ddot{\varphi} \approx -mg\overline{DS} \cdot (\cos\alpha - \varphi \sin\alpha) \tag{3}$$

$$\tau^2 \cdot \ddot{\varphi} - \varphi + b = 0 \quad \text{mit} \quad \tau^2 = \frac{J}{mg\overline{DS}\,\sin\alpha} \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{\tan\alpha} \tag{4}$$

$$\varphi(t) = b - a\cosh\left(\frac{t - t_0}{\tau}\right) \tag{5}$$

3 Experiment

Ich habe verschiedene Wackler aus Lego oder grösseren Duplo gebaut und die Bewegung videographiert. Die Filme wurden mit Logger Pro analysiert und so der Winkel $\varphi(t)$ extrahiert. Dann habe ich Gleichung (5) mit ProFit an die Messpunkte angepasst und für eine Halbschwingung eine gute Übereinstimmung erhalten. Die cosh-Funktion passt besser als ein Cosinus oder eine Parabel.

Um viele Halbschwingungen gemeinsam zu beschreiben, habe ich Gleichung (5) durch die ersten zwei Nullstellen t_1 und t_2 der Bewegung parametrisiert statt durch a und $t_0 = (t_1 + t_2)/2$, siehe Gleichung (6). So lassen sich die Funktionen für die einzelnen Halbschwingungen leicht aneinanderfügen.

$$\varphi(t, t_1, t_2) = \pm b \cdot \left(1 - \frac{\cosh\left(t/\tau - (t_1 + t_2)/(2\tau)\right)}{\cosh\left((t_2 - t_1)/(2\tau)\right)}\right) \quad \text{für} \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \tag{6}$$

$$\hat{\varphi} = b \cdot \left(1 - \frac{1}{\cosh\left(\frac{\Delta t}{2\tau}\right)}\right) \quad \text{mit} \quad \Delta t = t_2 - t_1 \tag{7}$$

Aus Gleichung (6) kann die Amplitude $\hat{\varphi}$ berechnet werden, siehe Gleichung (7). In Analogie zum hüpfenden Ball habe ich die Amplitude von Halbschwingung zu Halbschwingung um denselben Faktor $\delta < 1$ abnehmen lassen: $\hat{\varphi}_2 = \delta \cdot \hat{\varphi}_1$, etc. Aus der neuen Amplitude lässt sich die Dauer Δt der nächsten Halbschwingung und damit die nächste Nullstelle t_3 berechnen, etc. In dieser Weise lässt sich die ganze Bewegung über mehrere Halbschwingungen mit fünf Parametern $(\alpha, \tau, t_1, t_2, \delta)$ beschreiben, siehe Abbildung 2.

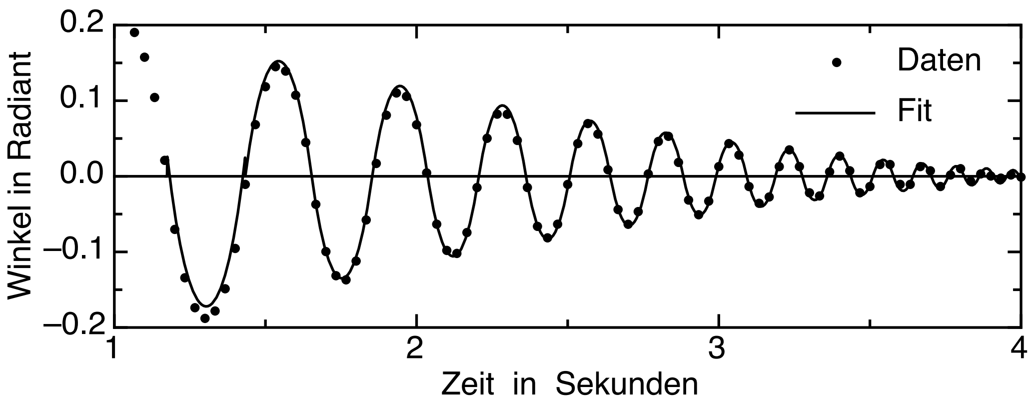


Abbildung 2: Bewegung $\varphi(t)$ eines ‘Lego-Wacklers’ mit Fitfunktion. Die Schwingung wurde mit einem iPhone gefilmt und mit Logger Pro digitalisiert. Der Fit besteht aus zusammengefügten cosh-Funktionen mit total fünf Fitparametern. Die Wackelfrequenz steigt mit abnehmender Amplitude.

Für kleine Amplituden ($\hat{\varphi} \to 0$) ist $\Delta t \propto \sqrt{\hat{\varphi}}$, d.h. die momentane Frequenz $f = 1/\Delta t$ variiert umgekehrt proportional zur Wurzel aus der Amplitude. Die Schwingung ist im doppelten Sinn nicht periodisch.

Details und Referenzen findet man unter: The Physics Teacher 51 (4), 231 (2013) 8. Okt. 2014, Lie.