Von der staatsbürgerlichen Bedeutung der Fehlerrechnung

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, 8001 Zürich

"Bäärn meint – das syyg de nit gloge uu betroge
miir hei d Stimmzeddle scho gäng numme gwoge!
U das sig de extreem prezyys – sääge o die vor ETH
Abgsee dervoo wääre mir z Bäärn – gäng no mit Zeue draa...
Peperoni"   Basler Fasnacht 2003[1]

Einleitung

Zu den Pflichten einer Lehrerin oder eines Lehrers gehört auch, seine oder ihre Schützlinge Tugend zu lehren. Eine wunderbare Gelegenheit, aus meiner Klasse 3a moralisch verbesserte Bürgerinnen und Bürger zu machen, bot sich geradezu an, nachdem sie bei schönstem Wetter an einer unbewilligten Friedensdemonstration teilgenommen hatte, statt bei mir in der Optik den Durchblick zu erlangen. Da meine Elevinnen und Eleven die Politik lieben, wollte ich ihren Elan nützen und bat sie um Hilfe, mir in einer Extrastunde die Daten für diesen Artikel zu beschaffen. Selten ging eine Lektion so schnell vorüber, welche Freude muss der Staatskundelehrer an dieser Klasse haben!
Das Experiment hat nämlich einen politischen Hintergrund: An der eidgenössischen Volksabstimmung vom 24. November 2002 haben die Thuner und Berner die Stimmzettel illegalerweise gewogen statt gezählt. In[2] wurde behauptet, dies sei sogar genauer als die Stimmzettel zu zählen.
Ich wollte mit der Klasse in einem Experiment untersuchen, ob das Stimmzettelwägen tatsächlich so extrem präzis ist, wie in der einleitenden Schnitzelbank behauptet. Zu diesem Zweck beschaffte ich mir eine Schachtel alter Karteikarten als Stimmzettelersatz und eben die Klasse 3a als Stimmenzähler.

Theorie

In[3] findet man folgende Formeln aus der beschreibenden Statistik:
Empirischer Mittelwert $\bar{x}$ der Messwerte x_1, x_2, .. x_n ist $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Empirische Standardabweichung der Stichprobe $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$

Mittlerer Fehler des Mittelwerts $s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$

Jeder Taschenrechner hält heute einen programmierten Algorithmus zur Berechnung der Steigung a und des Ordinatenabschnitts b einer Ausgleichsgeraden y = ax+b bereit. Weniger verbreitet ist die Formel zur Berechnung einer Ausgleichs-

Proportionalität y = cx (Regression nach der Methode der kleinsten Quadrate):

$$c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Man kann sie leicht aus der Formel für die Ausgleichsgerade herleiten, indem man den Koordinatennullpunkt in den Datenschwerpunkt verlegt.

Experiment

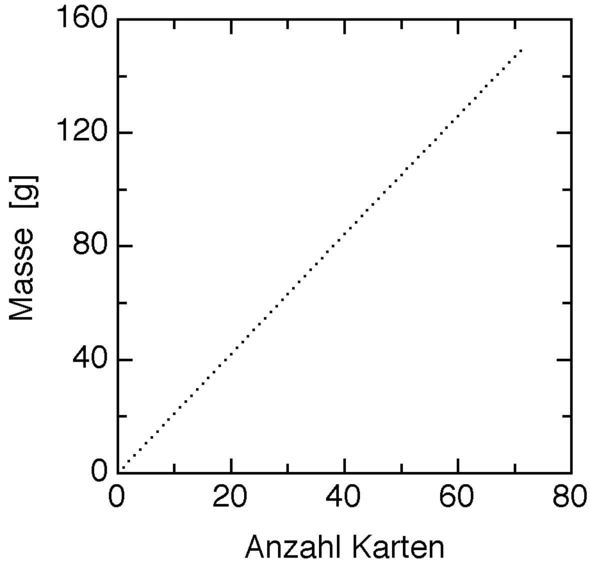
Als Erstes wollte ich die Präzision der Stimmenzähler abschätzen. Meine Schülerinnen und Schüler mussten zwei Kartenstapel durchzählen (Tabelle 1).

Stapel 1: 113, 122, 122, 123, 122, 122, 122, 122, 121
Stapel 2: 156, 157, 156, 160, 157, 146, 156, 156

Tabelle 1: Zählergebnisse der Schülerinnen und Schüler für die Kartenstapel 1 und 2

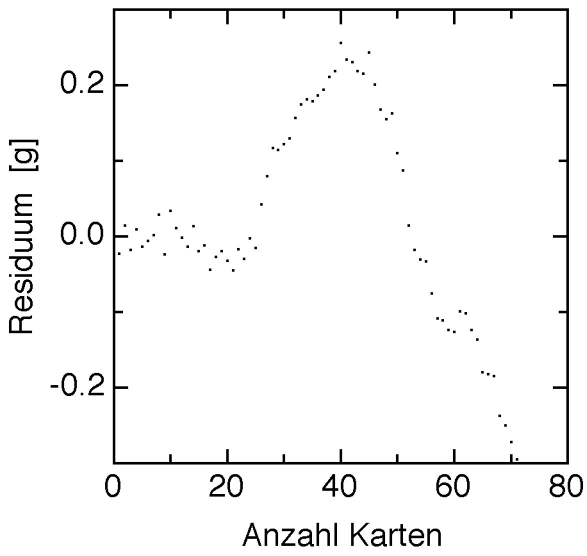
Man sieht, dass Zählen keineswegs immer eindeutige Resultate liefert. Man kann sich leicht verzählen. Mit solchen Fehlern ist natürlich auch bei Abstimmungen zu rechnen. Für den Stapel 1 erhalten wir als Mittelwert 121.00 Karten, als Stichproben-Standardabweichung (Streuung) 3.04 und als Fehler des Mittelwerts 1.01 Karten. Für den Stapel 2 sind die entsprechenden Werte 155.50, 4.07 und 1.44 Karten. Ich habe mehr als genug Nachkommastellen angegeben, weil ich mir keine Gedanken darüber machen will, wie gross der Fehler der Standardabweichung ist.

Als Zweites wollte ich untersuchen, wie gut sich Stimmzettel wägen lassen. Die Karteikarten, die als Stimmzettelersatz dienten, waren einseitig vorgedruckt und hatten die Abmessungen 106 mm mal 148 mm (Format A6, d.h. die Fläche sollte 2^{-6} m^2 sein und das Seitenverhältnis $1:\sqrt{2}$). Eine Karte wog etwa 2 g. Ich stellte den Schülerinnen und Schülern zwei elektronische Waagen mit Auflösung 0.01 g resp. 0.001 g zur Verfügung. Die Waagen wurden vor dem Versuch auf Null gestellt. Während des Versuchs drifteten sie weniger als 0.01 g. Die Schülerinnen und Schüler legten die Karten nacheinander auf die Waage und notierten die akkumulierte Masse des Stapels. Eine solche Messreihe ist in Figur 1 dargestellt.



Figur 1: Masse eines Stapels als Funktion der Anzahl aufgelegter Karteikarten. Die Masse des Stapels nimmt proportional zur Kartenzahl zu. Eine Regression liefert die Proportionalitätskonstante 2.1026 g. Dieser Stapel enthielt 71 Karten.

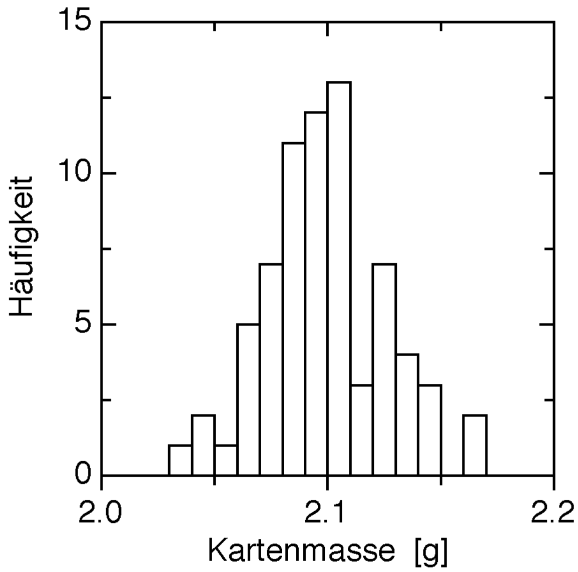
Um die Güte der Regression in Figur 1 zu beurteilen, zeichnete ich die Residuen, d.h. Stapelmassen minus Regressionswerte (Figur 2).



Figur 2: Residuen von Stapelmasse minus Regressionswert (s. Figur 1).

Wie man Figur 2 ansieht, sind die Residuen nicht normalverteilt. Die anderen Messungen zeigten ähnliche Bilder. Da die Residuen nicht normalverteilt sind, wird auch eine weiter gehende Diskussion schwierig. Für eine bessere Verteilung hätte ich die Karten vor dem Experiment mischen müssen.

Aus der in Figur 1 dargestellten Messreihe lassen sich durch Subtraktion aufeinander folgender Werte die Kartenmassen berechnen. Diese Kartenmassen sind in Figur 3 als Histogramm dargestellt. Die 71 Massen haben Mittelwert 2.0985 g und Streuung 0.0267 g. Der Unterschied der mittleren Masse 2.0985 g zur Proportionalitätskonstanten 2.1026 g (Figur 1) liegt noch innerhalb der Streubreite der Einzelmassen und ist dadurch zu erklären, dass ja die Stapelmasse nicht exakt proportional zur Kartenzahl steigt. (Die Steigung einer Ausgleichsgeraden wäre 2.1006 g.)



Figur 3: Histogramm der Kartenmassen aus der Messreihe von Figur 1. Die Verteilung hat anscheinend zwei Maxima. Nimmt man alle Messreihen, ergibt sich dasselbe Bild: eine bimodale Verteilung.
Die häufigste Kartenmasse ist 2.10 g, der zweite Gipfel ist bei 2.12 g.

Die Ursache der bimodalen Verteilung ist mir nicht klar. Vielleicht ist ein bestimmter Prozentsatz der Karten etwas zu gross abgeschnitten worden. Ein Unterschied von 0.02 g zwischen den zwei Gipfeln der Verteilung entspricht umgerechnet einer Längendifferenz von etwa 1 mm. Solche Längenvariationen sind mir aber nicht aufgefallen. Vielleicht hat aber auch die Papierstärke oder -feuchtigkeit geschwankt.

Zwei Gruppen mussten die Karten vollkritzeln. Ich habe aber keine Zunahme der durchschnittlichen Masse wegen der Beschriftung feststellen können. Die Streuung dieser 111 Kartenmassen war aber etwas grösser als jene der sauberen Karten. Die mittlere Masse einer vollgeschriebenen Karte war 2.0856 g und die Streuung 0.0323 g. (Die insgesamt 218 unbeschrifteten Karten hatten Mittelwert 2.1023 g und Streuung 0.0262 g.)

Schlussfolgerungen

Mussten die Schüler und Schülerinnen von Hand Grössenordnung hundert Karten zählen, so streuten die einzelnen Resultate etwa 3 % um den Mittelwert. Sie müssten also etwa zehn Mal zählen, damit der Fehler des Mittelwerts 1 % erreicht und 40 Mal, damit er unter 0.5 % kommt. Bei echten Stimmzetteln lohnt es sich nicht, so häufig zu zählen, denn erstens ist das teuer und zweitens hat man das Problem der schlecht lesbaren/ungültigen Stimmzettel noch nicht gelöst.
Wägt man einen Stapel von 100 Karten, so darf man erwarten, dass ein anderer Stapel mit gleicher Masse gleich viele Karten enthält. Aus der Betrachtung der Residuen und der Fehler der Mittelwerte folgt, dass man ziemlich sicher weniger als

eine Kartenmasse daneben liegt, d.h. der Wägefehler ist kleiner als 1 %. Wägen ist also tatsächlich genauer als Zählen, wie in[2] behauptet, falls man unter Zeitdruck möglichst schnell zu einem verlässlichen Resultat kommen will. In einer Abstimmung sind die Stimmzettel auch besser durchmischt als in unserer Simulation.

Quellen

[1]BASLER FASNACHT, Neue Zürcher Zeitung, 15./16. März 2003
[2]Neue Zürcher Zeitung, 28. Februar 2003
[3]DMK/DPK Formeln und Tafeln, Orell Füssli Verlag, 9. Auflage

Danksagung

Mein Dank geht an die Klasse 3a fürs Erheben der Daten.