

Springende Feder

Martin Lieberherr

Mathematisch Naturwissenschaftliches Gymnasium Rämibühl, 8001 Zürich

Einleitung

Der Wettbewerb SYPT [1] ist bei unseren Schülerinnen und Schülern sehr beliebt. Sie müssen offene Aufgaben experimentell untersuchen und ihre Resultate verteidigen. Einmal wurde ich wegen folgender Aufgabe um Hilfe gebeten, worauf ich leichtfertig einen vermeintlichen Tipp gab.

“16. Hoops

An elastic hoop is pressed against a hard surface and then suddenly released. The hoop can jump high in the air. Investigate how the height of the jump depends on the relevant parameters.” [2]

Ich sagte, der Reifen sei doch eine Art Feder, die gespannt und losgelassen wird. Sie sollen doch schnell mal das Analogon einer Hookeschen (linearen) Schraubenfeder durchrechnen und schauen, welcher Anteil der Federenergie in Translationsenergie umgesetzt wird. Für eine erste Abschätzung könne man ja die Schwerkraft weglassen.

1. Modell

Eine masselose Feder mit Federkonstante D verbinde zwei gleiche Körper mit Masse m (entsprechend den zwei Hälften des Reifens, siehe Abbildung 1). Die Feder werde um y komprimiert und losgelassen. Dann stösst sie sich von der Oberfläche ab.

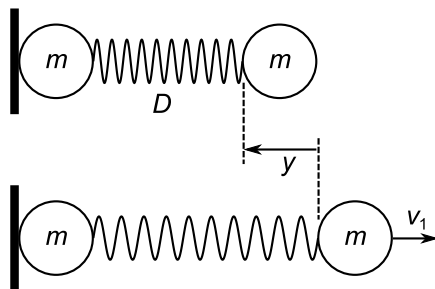


Abbildung 1: Wenn sich die um y komprimierte Feder streckt, verleiht sie dem freien Körper die Geschwindigkeit v_1 . Wenn sich die Feder entspannt hat, löst sich der anliegende Körper von der Oberfläche, denn ab diesem Moment zieht die Feder an ihm.

Die zwei durch die Feder verbundenen Körper werden sich von der Oberfläche lösen, wenn sich die ganze Spannungsenergie E_F der Feder in kinetische Energie E_{k1} des freien Körpers umgewandelt hat. Dann hat die Geschwindigkeit v_1 ihr Maximum erreicht. Wegen des Schwerpunktsatzes (Impulserhaltung) bewegt sich danach der gemeinsame Schwerpunkt mit $v_2 = v_1/2$; das freie System hat die Translationsenergie E_{k2} des Schwerpunkts, der Rest ist Vibrationsenergie.

$$E_{k1} = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}Dy^2 = E_F \quad \text{Energiesatz} \quad (1)$$

$$mv_1 = 2m \cdot v_2 \quad \text{Impussatz / Schwerpunktsatz} \quad (2)$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot (v_1/2)^2 = \frac{1}{2}E_{k1} = \frac{1}{2}E_F \quad (3)$$

In diesem Modell wird nur die Hälfte der Spannungsenergie in Translationsenergie verwandelt (und später in Lageenergie, wenn man die Schwerkraft wieder berücksichtigt und die Sprunghöhe viel grösser als y ist).

2. Modell

Die Feder wird als elastischer Stab der Länge l , Querschnittsfläche A , Dichte $\rho = m/(Al)$ und Elastizitätsmodul E modelliert, siehe Abbildung 2. Die Bewegung ist eine Überlagerung elastischer Wellen und kann mit der Elastizitätstheorie berechnet werden. [3]

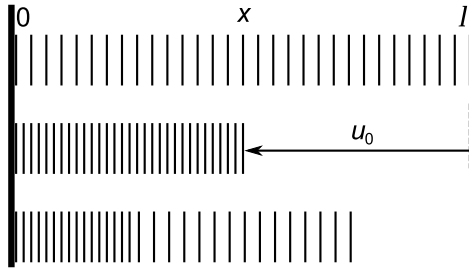


Abbildung 2: Der entspannte Stab (oben) habe Länge l . Er werde um u_0 komprimiert (Mitte). Die Kompression verteilt sich gleichmässig über den Stab. Lässt man ihn los, so entspannt er sich vom freien gegen das anliegende Ende (unten).

Wird der komprimierte Stab losgelassen, so ist die folgende Bewegung eine longitudinale Welle $u(x, t)$, die als Überlagerung harmonischer Wellen dargestellt werden kann. Die Welle muss die Randbedingungen $u(x, t) = 0$ bei $x = 0$ (anliegendes Ende, links) und $\partial u/\partial x = 0$ bei $x = l$ (freies Ende, rechts) und $t > 0$ erfüllen. Zur Zeit $t = 0$ muss die Welle folgende Form haben: $u(x, 0) = -x \cdot u_0/l$, d.h. jedes Element des Stabes ist nach links versetzt und die Versetzung u ist proportional zur Koordinate x . Die Welle $u(x, t)$ kann damit in folgender Weise als Fourierreihe dargestellt werden:

$$u(x, t) = -\frac{8u_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin((2n-1)kx) \cdot \cos((2n-1)\omega t) \quad (4)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2l} \quad \text{Kreiswellenzahl der Grundwelle mit Wellenlänge } \lambda = 4l \quad (5)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = ck \quad \text{Kreisfrequenz der Grundschwingung mit Periode } T \quad (6)$$

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{Geschwindigkeit longitudinaler Schallwellen im Stab} \quad (7)$$

Wie bei der gedackten Orgelpfeife kommen nur die ungeraden Harmonischen der Grundfrequenz vor.

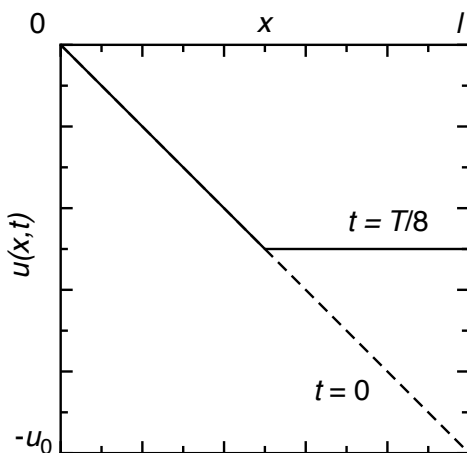


Abbildung 3: Zu Beginn ($t = 0$) ist die Auslenkung $u(x, t)$ proportional zur Position x . Zu späteren Zeitpunkten ($0 < t < T/4$) ist der Stab auf der rechten Seite ($x \rightarrow l$) entspannt und auf der linken Seite ($x \rightarrow 0$) so komprimiert wie am Anfang. Die Stelle, wo die Entspannung stattfindet, wandert mit konstanter Geschwindigkeit von rechts nach links durch den Stab. Die zwei Graphen $u(x, 0)$ und $u(x, T/8)$ entsprechen den unteren zwei Darstellungen in Abbildung 2. Wenn der Stab links befestigt wäre, würde er eine elastische Schwingung mit Periodendauer T ausführen.

Die Welle für $u(x, 0)$ entspricht dem ersten Viertel der Fourierreihe einer Dreieckschwingung. Stellt man die Welle (4) zu einigen Zeitpunkten dar, so ergibt sich ein überraschendes Bild (Abb. 3). Die Welle ist von gleicher Art wie die Bewegung einer in der Mitte gezupften Saite! (Abbildung 4)

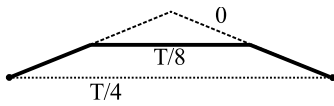


Abbildung 4: Die longitudinale Welle, welche die Entspannung eines komprimierten Stabes beschreibt, ist von ähnlicher Art wie die Bewegung einer in der Mitte gezupften, idealen Saite.

Nach der Zeit $t = \pi/(2\omega) = T/4$ ist der Stab vollkommen entspannt und alle seine Teile bewegen sich mit derselben Geschwindigkeit v von der Wand weg

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\omega t = \pi/2}^{kx = \pi/2} = \frac{8u_0\omega}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{8u_0\omega}{\pi^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right) = \frac{8u_0\omega}{\pi^2} \cdot \frac{\pi}{4} \quad (8)$$

$$= \frac{2u_0\omega}{\pi} = \frac{2u_0}{\pi} \cdot kc = \frac{2u_0}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot \frac{\pi}{2l} = \frac{u_0}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (9)$$

Durch Vergleich mit dem Federgesetz $F = Dy$ und dem Gesetz für die elastische Dehnung/Kompression eines Stabes $F = EAu_0/l$ folgt $D = EA/l$. Die Geschwindigkeit v , mit der sich der Stab von der Oberfläche löst, ist somit

$$v = \frac{u_0}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{u_0}{l} \sqrt{\frac{ElA}{m}} = \frac{u_0}{l} \sqrt{\frac{Dl^2}{m}} = u_0 \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (10)$$

Die kinetische Energie der Feder beim Abstoss ist also

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \cdot \left(u_0 \sqrt{\frac{D}{m}}\right)^2 = \frac{1}{2}Du_0^2 \quad (11)$$

Dies bedeutet, dass die *gesamte* Federenergie in kinetische Energie umgesetzt wird. (Was auch zu erwarten ist, wenn man gesehen hat, wie die Bewegung abläuft.)

Wie ist es nun beim IYPT-Problem? In [4] wird gezeigt, dass etwa 57 % der Spannungsenergie des Reifens in Translationsenergie des Schwerpunkts verwandelt wird. Das einfachere, 1. Modell liegt also näher an der Wirklichkeit als das 2. Modell.

Experiment

Abbildung 3 war für mich eine Überraschung, die erst nach einigem Nachdenken plausibel wurde. Die Bewegung wollte ich natürlich sofort mit eigenen Augen sehen. In der Sammlung fand ich eine geeignete Schraubenfeder: Länge 50 cm, Masse 28 g, Federkonstante 20 N/m. Die Windungen der entspannten Feder berührten sich nicht, d.h. die Feder könnte bei geeigneter Führung komprimiert werden. Die Feder wurde auf einer Seite befestigt. Das freie Ende dehnte ich mit der Hand horizontal um ca. 50 cm und liess los. Die Bewegung wurde mit einer Hochgeschwindigkeitskamera aufgenommen und der Film anschliessend mit LoggerPro analysiert. Man kann tatsächlich auf der Feder zwei Bereiche erkennen: auf der Seite der Hand entspannt sich die Feder, auf der Seite der Befestigung bleibt sie gespannt, ähnlich wie in Abb. 2 gezeichnet. Die Grenze zwischen den zwei Bereichen wandert. Sowohl diese Grenze als auch das freie Ende bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit, siehe Abbildung 5. Leider ist der Film zu kontrastarm um hier ein Standbild wiederzugeben. Stimmt

die gemessene Geschwindigkeit des freien Endes mit Gleichung (10) überein?

$$v = u_0 \sqrt{\frac{D}{m}} \approx 0.50 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{20 \text{ N/m}}{0.028 \text{ g}}} = 13 \text{ m/s} \quad (12)$$

Die Theorie liefert einen Wert, der zwischen den beiden Messwerten liegt ($v_1 \approx 12.5 \text{ m/s}$ und $v_3 \approx 14.9 \text{ m/s}$ in Abb. 5). Die Theorie stimmt also im Rahmen dieses einfachen Experiments. Ausserdem wandert, wie zu erwarten, die Grenze ungefähr mit doppelter Geschwindigkeit wie das freie Ende.

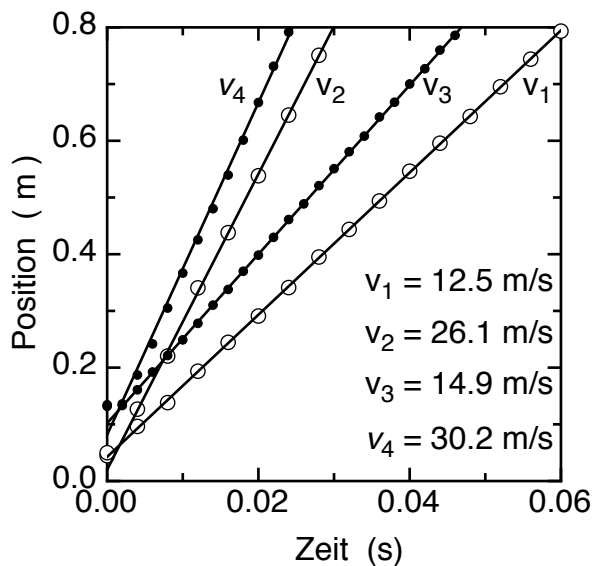


Abbildung 5: Wird eine gespannte Feder losgelassen, so bewegt sich das freie Ende mit konstanter Geschwindigkeit (v_1, v_3) und ebenso die Stelle, wo sich die Feder entspannt (v_2, v_4). Im Diagramm sind die Daten aus einem Film mit 250 Bildern pro Minute (offene Kreise) und aus einem Film mit 500 Bildern pro Sekunde (schwarze Punkte) dargestellt. Das freie Ende der Feder bewegt sich etwa mit halber Geschwindigkeit wie die Grenze zwischen entspanntem/gespanntem Federabschnitt ($v_1 \approx v_2/2, v_3 \approx v_4/2$).

Literatur

- [1] Swiss Young Physicists' Tournament, siehe <http://www.sypt.ch>
- [2] International Young Physicists' Tournament, siehe <http://www.iypt.org>, Problems 2013
- [3] 'Hütte – Des Ingenieurs Taschenbuch', Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1955
- [4] E. Yang, H-Y. Kim, 'Jumping hoops', Am. J. Phys. 80, 19-23 (2012)