Auf die schiefe Bahn geraten

Martin Lieberherr
Mathematisch Naturwissenschaftliches Gymnasium Rämibühl, 8001 Zürich

Einleitung

Wie jede Lehrkraft überarbeite ich ab und zu meine Aufgaben, um sie für meine Klassen klarer zu machen. Bei einer Aufgabe zur schiefen Ebene mit Reibung ist mir aufgefallen, dass ich nicht geschrieben hatte, dass die Bewegung entlang der Falllinie erfolgen solle. Ich hab's dann aber bleiben lassen, weil sich die Schülerinnen und Schüler ohnehin auf diesen Fall beschränken. Aber für mich als Lehrkraft gilt das natürlich nicht: Ich möchte wissen, was geschieht, wenn diese Beschränkung wegfällt. Und so habe ich mich – glücklich über diese neue Aufgabe – an den Computer gesetzt und bin prompt rechnerisch auf die schiefe Bahn geraten.

Simulation

Zur Übersicht habe ich die Bahnen zeichnen lassen, siehe Abbildung 1. Dazu wurde Gleichung (1) mit dem Euler-Cromer-Verfahren numerisch integriert. Die Zeichenebene ist parallel zur Bahnebene.

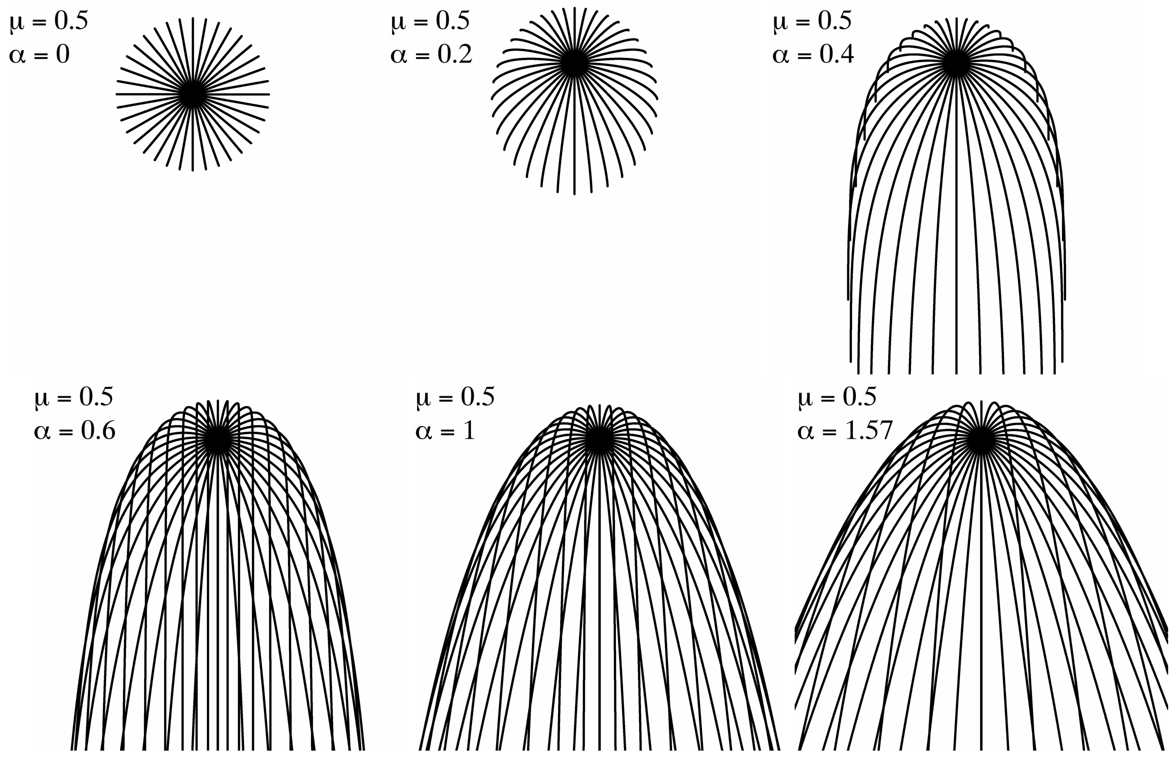

Abbildung 1: Bahnen mit gleichem Startpunkt auf verschieden geneigten Ebenen (Neigungswinkel α in Radiant). Die Abschuss-Schnelligkeit ist konstant, ebenso der Gleitreibungskoeffizient $\mu = 0.5$. Die Abschussrichtung (Scharparameter) wird ausgehend von der Horizontalen in 10°-Schritten erhöht. Für $\alpha = 0$ (horizontale Ebene) sind die Bahnen gerade. Für $\alpha < 0.4636\ldots$ kommt die Bewegung zum Stillstand. Für $\alpha \to \pi/2$ werden die Bahnen und deren Einhüllende zu Parabeln.

Theorie

Die resultierende Kraft auf den Körper (Massenpunkt) setzt sich zusammen aus der Gleitreibungskraft und dem Anteil der Gewichtskraft parallel zur Ebene:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{res} = -mg\sin\alpha\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \mu mg\cos\alpha\cdot\frac{1}{\upsilon}\begin{pmatrix}\upsilon_x\\\upsilon_y\end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad \upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2} \tag{1}$$

g ist die Fallbeschleunigung, α der Neigungswinkel der Ebene gegen die Horizontale, μ die Gleitreibungszahl und υ die Schnelligkeit (Betrag des Geschwindigkeitsvektors). Die y-Achse zeigt entlang der Falllinie parallel zur Ebene nach oben, die x-Achse liegt horizontal in der Ebene.

Die Vektorgleichung (1) besteht aus zwei gekoppelten, gewöhnlichen Differentialgleichungen. Da ich diese Gleichung nicht selber lösen konnte, habe ich sie numerisch integriert. Die Bahnen, siehe Abb. 1, haben mich nicht an bekannte Kurven erinnert. Wenn die Komponente der Gewichtskraft parallel zur Ebene grösser als die Gleitreibungskraft wird, gibt es kein Kräftegleichgewicht mehr. Der Körper kommt ab dem Grenzwinkel $\alpha = \arctan\mu = \arctan\frac{1}{2} \approx 0.4636\,\text{rad}$ nicht mehr zur Ruhe. Die Form der Bahn ist anscheinend unabhängig vom Betrag der Anfangsgeschwindigkeit. Die Schüler wissen, dass sich der Bremsweg vervierfacht, wenn die Anfangsgeschwindigkeit verdoppelt wird. Ein analoges Verhalten ist in Abbildung 2 zu erkennen.

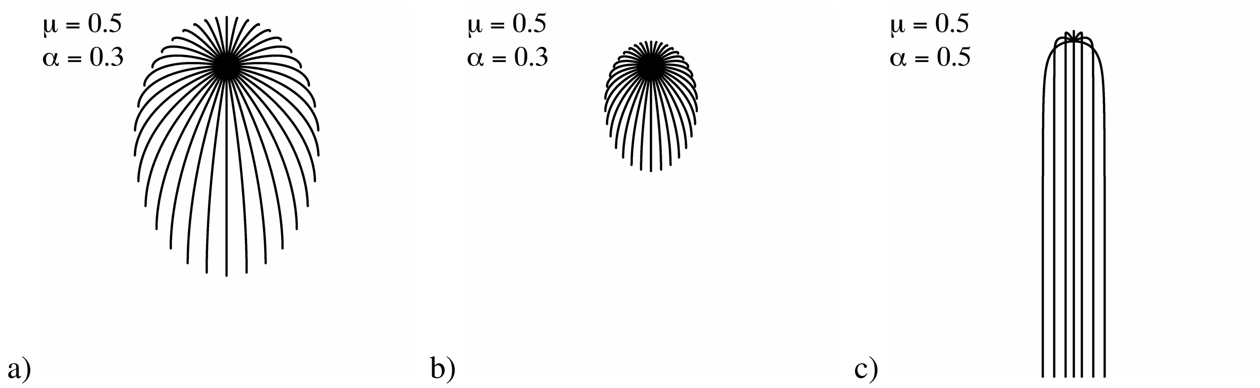

Abbildung 2: a,b) Bahnen auf der gleichen schiefen Ebene für zwei verschiedene Anfangsschnelligkeiten. Die Startschnelligkeiten haben das Verhältnis $\sqrt{2} : 1$ und offenbar haben die Bahnkurven dieselbe Form. Skaliert man das linke Bild (a) auf 50 % seiner Ausgangsgrösse, so ist es auf dem Computermonitor deckungsgleich mit dem mittleren Bild (b). c) Oberhalb eines bestimmten Winkels rutscht der Körper immer weiter und bewegt sich asymptotisch geradlinig entlang der Falllinie.

Falls der Körper zum Stillstand kommt, zeigen die Enden der Bahnkurven immer entlang der Falllinie nach unten. Am Schluss verschwindet nämlich die Bahngeschwindigkeit und damit die Zentripetalbeschleunigung. Das ist nur möglich, wenn die Gleitreibungskraft entlang der Falllinie aufwärts gerichtet ist und die entgegengesetzt gerichtete Komponente der Gewichtskraft kompensiert [1].

Die allgemeine Lösung von Gleichung (1) wurde im Jahr 2010 von V. M. Shunyakov und L. V. Lavrik veröffentlicht [2]. Ich möchte die Rechnung hier wiedergeben:

Aus Gleichung (1) kann die Masse m eliminiert werden:

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -g\sin\alpha\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \mu g\cos\alpha\cdot\frac{1}{\upsilon}\begin{pmatrix}\upsilon_x\\\upsilon_y\end{pmatrix} \tag{2}$$

Statt weiter mit der x-Komponente der Beschleunigung zu arbeiten, verwenden wir stattdessen die Bahnbeschleunigung, d.h. die Komponente der Beschleunigung parallel zum Geschwindigkeitsvektor.

$$\frac{d\upsilon}{dt} = -g\sin\alpha \cdot \frac{\upsilon_y}{\upsilon} - \mu g\cos\alpha \cdot \frac{\upsilon}{\upsilon} \tag{3}$$

Die analog geschriebene Differentialgleichung für υ_y lautet:

$$\frac{d\upsilon_y}{dt} = -g\sin\alpha \cdot \frac{\upsilon}{\upsilon} - \mu g\cos\alpha \cdot \frac{\upsilon_y}{\upsilon} \tag{4}$$

Damit die Gleichungen einfacher geschrieben werden können, verwenden wir die Abkürzung

$$k = \frac{\mu}{\tan\alpha} \tag{5}$$

Damit erhalten wir folgende Vektorgleichung:

$$\begin{pmatrix} d\upsilon_y/dt \\ d\upsilon/dt \end{pmatrix} = -\frac{g\sin\alpha}{\upsilon} \cdot \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \upsilon_y \\ \upsilon \end{pmatrix} \tag{6}$$

Gleichung (6) kann vereinfacht werden, wenn wir t, υ_y und υ parametrisch durch die unabhängige Variable z ausdrücken:

$$\begin{pmatrix} d\upsilon_y/dz \\ d\upsilon/dz \end{pmatrix} \cdot \frac{dz}{dt} = -\frac{g\sin\alpha}{\upsilon} \cdot \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \upsilon_y \\ \upsilon \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\text{setze} \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{g\sin\alpha}{\upsilon} \quad \text{Aus Gleichung (7) wird mit dieser Definition:} \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} d\upsilon_y/dz \\ d\upsilon/dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \upsilon_y \\ \upsilon \end{pmatrix} \tag{9}$$

(9) ist ein lineares, homogenes Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Die Lösung steht in jedem besseren Handbuch, z. B. [3], und ist die Summe zweier Exponentialfunktionen:

$$\upsilon(z) = a \cdot e^{(k+1)z} + b \cdot e^{(k-1)z} \qquad a = \tfrac{1}{2}\left(\upsilon_0 + \upsilon_{y0}\right) \tag{10}$$

$$\upsilon_y(z) = a \cdot e^{(k+1)z} - b \cdot e^{(k-1)z} \qquad b = \tfrac{1}{2}\left(\upsilon_0 - \upsilon_{y0}\right) \tag{11}$$

$$\upsilon_x(z) = \sqrt{\upsilon^2 - \upsilon_y^2} = c \cdot e^{kz} \qquad c = \sqrt{\upsilon_0^2 - \upsilon_{y0}^2} = \upsilon_{x0} \tag{12}$$

Damit wir die parametrisierte Zeit $t(z)$ erhalten, müssen wir die Differentialgleichung (8) integrieren:

$$\int dt = -\frac{1}{g\sin\alpha} \int \upsilon(z) dz \Rightarrow \ldots \tag{13}$$

$$t = t_c - \frac{1}{g\sin\alpha}\left(\frac{a}{k+1}e^{(k+1)z} + \frac{b}{k-1}e^{(k-1)z}\right) \tag{14}$$

Die Integrationskonstante t_c kann man so wählen, dass $t = 0$ für $z = 0$ wird. Um die parametrisierte Bahnkoordinate $x(z)$ zu erhalten, muss die Differentialgleichung (12) integriert werden:

$$x = \int \upsilon_x dt = \int \upsilon_x dz \cdot \frac{dt}{dz} = \int \upsilon_x dz \cdot \frac{-\upsilon}{g\sin\alpha} = \frac{-1}{g\sin\alpha} \int \upsilon\, \upsilon_x dz = \ldots \tag{15}$$

$$x = x_c - \frac{1}{g\sin\alpha}\left(\frac{ac}{2k+1}e^{(2k+1)z} + \frac{bc}{2k-1}e^{(2k-1)z}\right) \tag{16}$$

Die Integrationskonstante x_c kann man so wählen, dass $x = 0$ für $z = 0$ wird. Um $y(z)$ zu erhalten, muss die Differentialgleichung (11) integriert werden:

$$y = \int v_y dt = \cdots = y_c - \frac{1}{g \sin\alpha}\left(\frac{a^2}{2(k+1)}e^{2(k+1)z} - \frac{b^2}{2(k-1)}e^{2(k-1)z}\right) \tag{17}$$

Die Integrationskonstante y_c kann so gewählt werden, dass z. B. $y = 0$ für $z = 0$ wird.

Ein Spezialfall als Kontrolle: Der Abschuss erfolge im Nullpunkt mit Schnelligkeit v_0 entlang der y-Achse nach oben.

$$\Rightarrow v_{y0} = +v_0\ ,\ t_0 = y_0 = x_0 = v_{x0} = 0\ ,\ a = v_0\ ,\ b = c = 0 \quad \text{einsetzen in (14)} \tag{18}$$

$$t = \frac{1}{g \sin\alpha}\left(\frac{v_0}{k+1}\right) - \frac{1}{g \sin\alpha}\left(\frac{v_0}{k+1}e^{(k+1)z}\right) \Rightarrow \tag{19}$$

$$z = \frac{1}{k+1}\ln\left(1 - \frac{(k+1)g\sin\alpha}{v_0}\cdot t\right) \quad \text{mit (18) einsetzen in (17)} \tag{20}$$

$$y = \frac{1}{g \sin\alpha}\left(\frac{v_0^2}{2(k+1)}\right) - \frac{1}{g \sin\alpha}\left(\frac{v_0^2}{2(k+1)}e^{2(k+1)z}\right) \tag{21}$$

$$y = \frac{1}{g \sin\alpha}\left(\frac{v_0^2}{2(k+1)}\right) - \frac{1}{g \sin\alpha}\cdot\frac{v_0^2}{2(k+1)}\left(1 - \frac{(k+1)g\sin\alpha}{v_0}\cdot t\right)^2 \tag{22}$$

$$y = v_0\cdot t - \tfrac{1}{2}(k+1)g\sin\alpha\cdot t^2 = v_0\cdot t - \tfrac{1}{2}(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)g\cdot t^2 \quad \checkmark \tag{23}$$

Die allgemeine Lösung (14), (16) und (17) kann man prüfen, indem man sie zusammen mit den numerisch integrierten Bahnkurven zeichnet, siehe Abbildung 3.

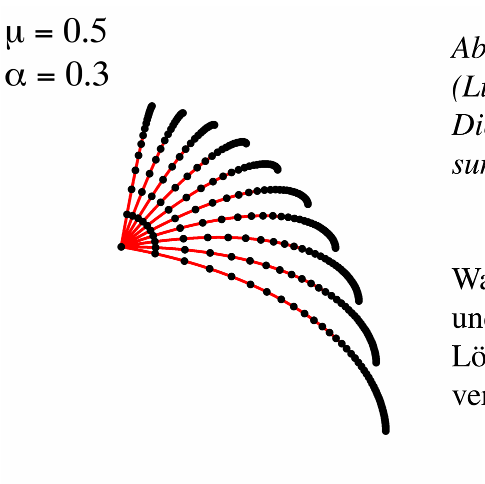

Abbildung 3: Eine Auswahl numerisch integrierter Bahnen (Linien) mit einigen exakt berechneten Positionen (Punkte). Diese Darstellung legt nahe, dass die oben vorgestellte Lösung auch im allgemeinen Fall zutrifft.

Was zu tun bleibt: Der Definitionsbereich der Lösung und die Vorzeichen sollten geprüft werden. Die 'allgemeine Lösung' versagt im Fall $k = 1$, d.h. wenn Reibung und vertikale Komponente des Gewichts gleich gross sind.

Literatur

[1] The Physics Teacher, Solution to November 2009 Challenge, < http://tpt.aapt.org >

[2] V. M. Shunyakov and L. V. Lavrik, "Analytical solution of curvilinear motion on an inclined plane", Am. J. Phys. **78** (12), 1406–1411, (Dec. 2010).

[3] I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew, "Taschenbuch der Mathematik", Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt a. M., 1981