

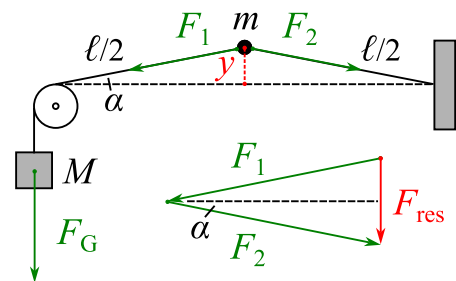
Saitenpendel

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

1 Einleitung

Das Saitenpendel – kein offizieller Begriff – besteht aus einer undehnbaren, leichten, mit der Kraft F gespannten Saite der Länge ℓ , die in der Mitte als Pendelkörper eine Perle der Masse m trägt, siehe Abbildung 1 für eine experimentelle Realisierung. Die rücktreibende Wirkung stammt von der Spannkraft. Mit welcher Frequenz schwingt die Perle?

Abbildung 1: Eine Perle der Masse m ist in der Mitte eines leichten Fadens der Länge ℓ befestigt. Der Faden wird mit einer Lastmasse M über eine Rolle mit einer Kraft F gespannt, welche dem Lastgewicht $F_G = Mg$ entspricht. Auf die Perle wirken deshalb die Spannkraften $F = F_1 = F_2 = F_G$ von links und rechts, wenn die Perle um ein kleines y aus der Gleichgewichtslage gestossen wird. Die Perle erfährt dann eine rücktreibende Kraft F_{res} . Die Bewegungen der Rolle und der Masse M sind in erster Näherung vernachlässigbar.



2 Theorie

Mit der Ähnlichkeit der Dreiecke in Abbildung 1 folgt:

$$\frac{F_{\text{res}}/2}{F} = \frac{y}{\ell/2} \Rightarrow F_{\text{res}} = (-)\frac{4F}{\ell} \cdot y = -\frac{4Mg}{\ell} \cdot y$$

$$a = m^{-1}F_{\text{res}} \rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{4F}{\ell m} \cdot y \leftrightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{4F}{\ell m}} = \sqrt{\frac{4Mg}{\ell m}}$$

Wir erhalten die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung und können die Kreisfrequenz ω_0 ableiten. (Im Verborgenen wurde eine Näherung für kleine Auslenkungen verwendet. Wo?)

In Abb. 1 bewegt sich die Perle auf und ab. Sie könnte sich auch aus der Zeichenebene heraus und hinein bewegen. Die Kombination ergibt eine elliptische Bewegung. Sind die Amplituden gleich gross, ergibt sich eine Kreisbewegung, für welche mit $F_{\text{res}} = mr\omega^2$ ein wohlbekannter Ansatz zur Verfügung steht. Es folgt

$$\omega^2 = \frac{4F}{\ell m} \cos \alpha$$

wobei α der Auslenkwinkel der Schnur von der Nulllinie ist. Für kleine Auslenkungen stimmt die Winkelgeschwindigkeit ω mit der Kreisfrequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung überein.

Ohne Perle erwartet man die Frequenz f_1 des Grundtons einer Saite. Das folgende Experiment zeigt Messungen an einer schwingenden Perle und – zum Vergleich – einer schwingenden Saite.

3 Experiment

Ich verwendete Küchengarn und axial durchbohrte Messingzylinder in der Anordnung von Abbildung 1. Die Bewegung wurde mit einem Samsung Galaxy A53 videographiert (Zeitraffer 240 fps) und mit Tracker¹ analysiert. Die Resultate sind in Abb. 2 und 3 dargestellt.

Abbildung 2: Kreisfrequenz ω des Saitenpendels als Funktion der Spannmasse M .

Ein Perle der Masse $m = 55.1 \text{ g}$ befindet sich in der Mitte einer gespannten Schnur der Länge 100 cm und wird in vertikale Schwingungen versetzt. Die Spannkraft $F = Mg$ entspricht dem Gewicht der Spannmasse. Die gemessenen Kreisfrequenzen (Punkte) sind etwa 5 % tiefer als die nach der Theorie berechneten (durchgezogenen Linie).

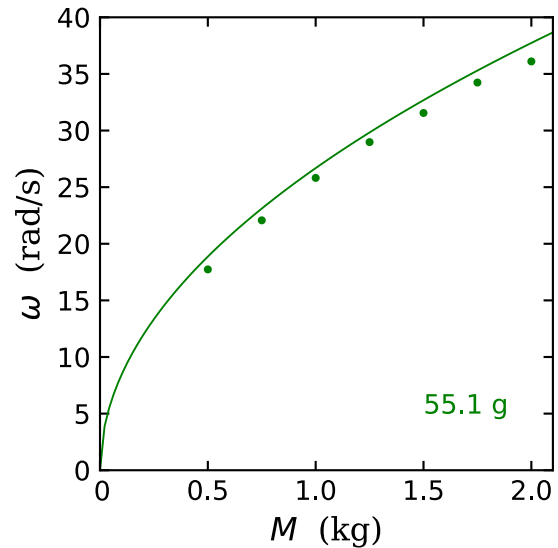
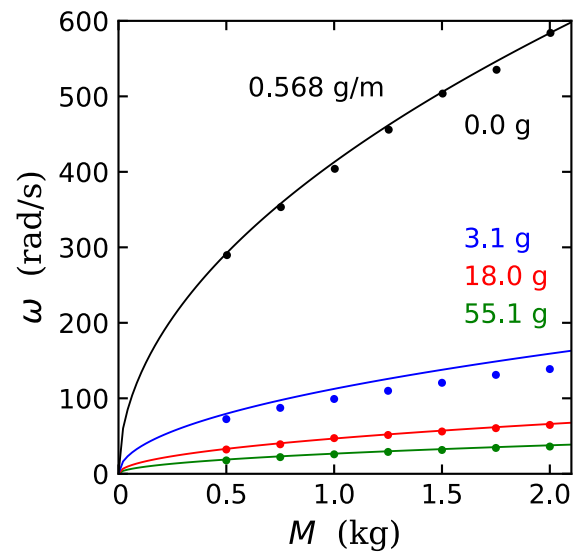


Abbildung 3: Kreisfrequenz des Saitenpendels (Pendelmassen 55.1 g , 18.0 g , 3.1 g) als Funktion der Spannmasse M . Die Messungen sind als Punkte, die Theorie als durchgezogene Linien eingetragen.

Zum Vergleich ist die Kreisfrequenz der unbelasteten Saite dargestellt (0.0 g , Theorie siehe unten). Die Schnur, die als Saite diente, hatte einen Massenbelag von $\mu = 0.568 \text{ g/m}$ und die Länge 1.00 m .



Frequenz der Saite ohne Zusatzmasse
("0.0 g" in Abb. 3)

$$f_1 = \frac{1}{2\ell} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \rightarrow \omega_1 = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{Mg}{\mu}}$$

4 Diskussion

Die Schwingung einer masselosen Saite mit vielen Pendelkörpern wird oft als Modell für eine schwingende, schwere Saite verwendet oder um die Normalschwingungen eines Kristalls zu modellieren. Die Saite mit nur einem Pendelkörper führt auf die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators. Die Linearisierung lässt sich besser verstecken als beim mathematischen Pendel. Die Genauigkeit ist vergleichbar mit jener der Aräometer-Schwingung.

¹ <https://physlets.org/tracker> (1. Juni 2024)