Regenbogenstreuung

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, 8001 Zürich

Einleitung

Wer rennt nicht ans Fenster, wenn es einen Regenbogen zu sehen gibt? Ich nehme an, Sie wissen, wie er zu Stande kommt. Erste Erklärungen[1] dieses Phänomens stammen aus dem Mittelalter (Abb. 1). René Descartes konnte qualitativ zeigen[2], dass Licht durch Brechung und Reflexion bevorzugt in bestimmte Richtungen abgelenkt wird (1637). Zu seiner Zeit war aber die Differentialrechung noch zuwenig entwickelt, um den Streuwinkel exakt zu bestimmen. Die Rechnung ist aber nicht schwierig und kann sogar von Gymnasiasten nachvollzogen werden.

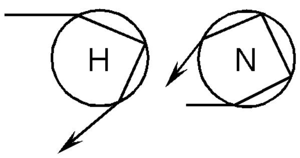

Abbildung 1: Der Mönch Dietrich von Freiberg fand zw. 1304 und 1311 in Versuchen mit Wasserflaschen, dass Haupt- und Neben-Regenbögen auf den dargestellten Strahlengängen von Licht in Wassertropfen beruhen.

Theorie

Wie gross sind die Ablenkwinkel bei der geometrischen Regenbogenstreuung an einem kugelförmigen Wassertropfen? Der Ablenkwinkel δ wird gemessen zwischen dem einfallenden Strahl und dem Strahl, welcher den Tropfen verlässt (Abb. 2)

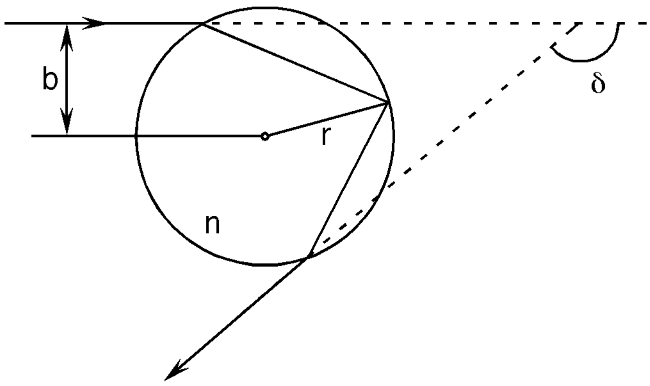

Abbildung 2: Der kugelförmige Wassertropfen hat Radius r und Brechungsindex n relativ zur Umgebung. Der Ablenkwinkel δ ist eine Funktion des Stossparameters b und der relativen Brechzahl n. Er lässt sich leicht mit Hilfe des Reflexions- und Brechungsgesetzes bestimmen.

Der Ablenkwinkel δ als Funktion des relativen Stossparameters $x = b/r$ (Abb. 2) ist:

$$\delta = m \cdot 180° + 2 \cdot \arcsin x - (2 + 2m) \cdot \arcsin(x/n)$$

Dabei ist m die Anzahl interner Reflexionen (m = 1 für den Hauptregenbogen, wie in Abb. 2 gezeichnet). Der Graph von $\delta(x)$ hat Minima oder Maxima. Leiten wir $\delta(x)$ nach x ab und setzen die Ableitung Null, so erhalten wir die stationären Stellen:

$$x_{stat} = \sqrt{\frac{(1+m)^2 - n^2}{(1+m)^2 - 1}}$$

Setzt man x_{stat} in $\theta(x)$ ein, so erhält man die zugehörigen stationären Winkel θ_{stat}. In diese Richtungen wird besonders viel Licht abgelenkt. Für n = 1.333 (Wasser im gelben Spektralbereich) erhält man folgende Regenbogen-Streuwinkel: (Tabelle)

m	x_{stat}	θ_{stat}	halber Öffnungswinkel	Bemerkungen
1	0.86084	137.92°	42.08°	Hauptregenbogen
2	0.95020	230.89°	50.89°	Nebenregenbogen
3	0.97376	318.26°	138.26°	gegen die Sonne
4	0.98368	403.70°	136.30°	gegen die Sonne
5	0.98884	488.23°	51.77°	im Nebenregenbogen

Tabelle: Stationäre Stossparameter x_{stat} und Regenbogen-Streuwinkel θ_{stat} als Funktion der Anzahl m interner Reflexionen für einen Brechungsindex n = 1.333. Mit der Sonne im Rücken haben die Bögen den angegebenen, halben Öffnungswinkel.

Simulation

Die formale Rechnung ist schön und wohlbekannt, aber Bildchen sind hübscher. Ich wollte deshalb die Regenbogenstreuung numerisch simulieren. Zuerst musste ich Lichtstrahlen sowie Reflexion und Brechung an einer Kugel vektorgeometrisch (zweidimensional) beschreiben. Dann liess ich viele Strahlengänge vom Computer berechnen und zeichnen. Jedes Mal, wenn ein Strahl ein Pixel traf, wurde dessen Grauwert um eine Einheit erhöht. So erscheint eine hohe Lichtintensität als weisse Stelle. Um den Helligkeitseindruck noch etwas näher an die Realität heranzuführen, liess ich den Weg an der Grenzfläche Wasser-Luft mit einer Wahrscheinlichkeit entsprechend dem Wert des Reflexionskoeffizienten (für s-polarisiertes Licht) einschlagen. Ist der Strahl erst mal in den Tropfen eingetreten, könnte er dort im Prinzip beliebig oft reflektiert werden, aber nach spätestens 100 Reflexionen liess ich die Rechung abbrechen.

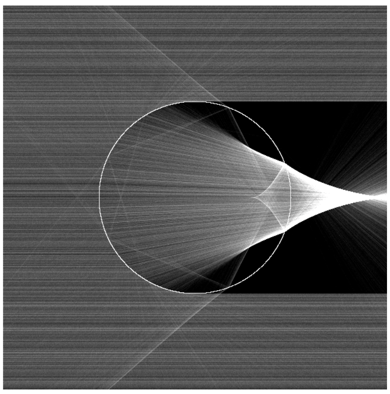

Abbildung 3: Simulierte Lichtstreuung an einem kugelförmigen Tropfen. $2{\cdot}10^4$ Lichtstrahlen wurden am linken Bildrand auf einer zufällig gewählten Höhe abgeschossen. Die Strahlen wurden an der Grenzfläche Luft/Wasser in zufälliger Weise entweder reflektiert oder transmittiert (mit einer Wegwahl entsprechend dem Reflexionskoeffizienten). Die Helligkeitswerte (8 Bit) wurden sukzessive aufaddiert. Das Bild hat eine Kantenlänge von 600 Pixeln.

Abbildung 3 sieht schon recht hübsch aus (auf dem Bildschirm besser als im Druck), aber die stationären Streuwinkel sind kaum erkennbar. Man hat die Wahl zwischen Überbelichtung der hellen Stellen respektive Unsichtbarkeit der lichtschwachen Orte.

Ich habe deshalb die Rechnung wiederholt und dann das Bild durch ein Hochpassfilter geschickt, um die Kanten hervorzuheben. Das numerische Filter subtrahierte vom Grauwert eines Pixels den mittleren Grauwert der benachbarten Pixel (sog. "unscharf maskieren"). Das Resultat kann in Abb. 4 betrachtet werden.

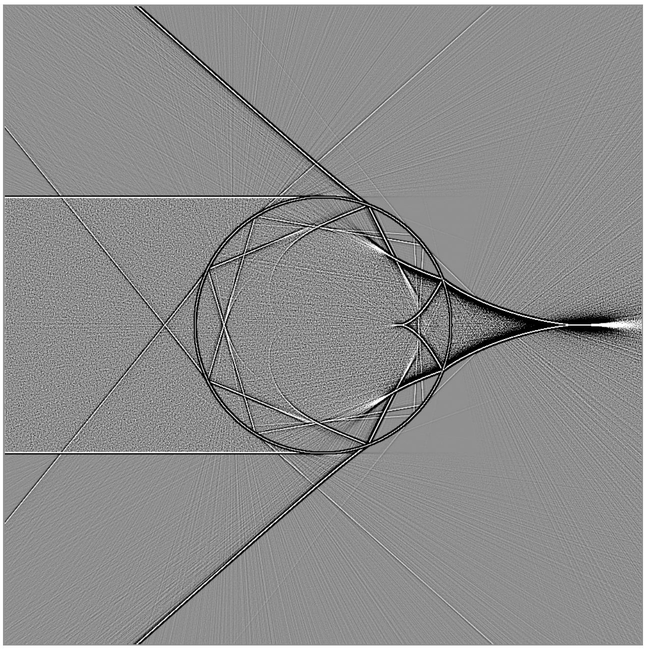

Abbildung 4: Regenbogenstreuung
10^6 Strahlen wurden gleichmässig auf den Tropfen geschossen und die Intensitäten addiert; anschliessend wurden die Helligkeiten mit einem Hochpassfilter ("unsharp masking") ausgeglichen. Auf diese Weise sieht man die Feinstruktur der Lichtintensität im Tropfen besser. Das Bild hat 1000 Pixel Kantenlänge.

Können Sie die Regenbogen-Streuwinkel (Tabelle) in der Abbildung finden?

Wassertropfen als Linse

Man sieht in den Abbildungen 3 und 4, dass der Tropfen das einfallende Licht bündelt. Das gebündelte Licht geht leider nicht exakt durch einen Punkt sondern bildet eine Kaustik. Wenn man sich aber auf Strahlen nahe der Mittelachse beschränkt, wirkt der Tropfen wie eine Linse. Wie gross ist deren Brennweite? Nach der Theorie der dicken Linse[3] erhält man:

Brennweite $f = \frac{n}{2(n-1)} r$ (Abstand hintere Hauptebene-Brennpunkt)

Schnittweite $s = \frac{n}{2(n-1)} r - r$ (Abstand Kugelscheitel-Brennpunkt)

Für den relativen Brechungsindex n = 1.333 erhält man Brennweite $f = 2.002 \cdot r$ und Schnittweite $s = 1.002 \cdot r$. Diese Werte passen zu den Abb. 3 und 4, denn dort hat die Spitze der Kaustik einen Abstand von ca. einem Radius von der Kugel. Wir sehen auch, dass bei einer Kugellinse die vordere und hintere Hauptebene zusammen fallen. Die Hauptebene ist also hier gleich der Mittelebene.

Quellen

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Regenbogen (Aufruf am 10. August 2006)
[2] Fritz Kubli "Mit Geschichten und Erzählungen motivieren" Aulis Verlag 2005, 22-30
[3] Anhang zum Katalog der Optikfirma Spindler & Hoyer