

# Mechanisch-Relativistischer Dopplereffekt

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

## 1 Einleitung

In der Wellenlehre wird gewöhnlich zwischen dem akustischen und optischen Dopplereffekt unterschieden. Der akustische Dopplereffekt tritt bei Schallwellen auf und wird klassisch gerechnet. Der optische Dopplereffekt wird relativistisch behandelt und gilt für elektromagnetische Wellen. Ich möchte das gerne anhand eines Gedankenexperiments in einen grösseren Kontext setzen. Der Dopplereffekt ist aus heutiger Sicht kein Wellenphänomen: Er beschreibt nur die Transformation von Längen und Zeiten beim Wechsel des Bezugssystems. Bei der Anwendung auf Wellen ist die Länge natürlich die Wellenlänge und die Zeit die Schwingungsdauer (Kehrwert der Frequenz). Um das zu zeigen werde ich ein mechanisches Beispiel relativistisch durchrechnen. Als Vorwissen wird die Phase einer Welle sowie die Lorentztransformation benötigt. Die Rechnung gibt mir auch Gelegenheit, für eine modernere Sicht auf die spezielle Relativitätstheorie zu werben.

## 2 Gedankenexperiment

Der Kondukteur setzt sich für den Znüni in den fahrenden Speisewagen. Die Kellnerin bringt ihm ein Steakmesser mit Wellenschliff. Wir betrachten diese "Messerwelle" aus der Sicht des Kondukteurs und der Bahnhofsvorsteherin, während der Zug durch den Bahnhof fährt. Wir rechnen eindimensional.

### 1. Kondukteur-System $S_0$

Der Kondukteur kann die Messerschneide als mechanische Welle mit Wellenfunktion  $y = \hat{y} \sin(k_0 x_0 - \omega_0 t_0)$  beschreiben. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Messerwelle ist  $u_0 = \omega_0/k_0$ .

### 2. Bahnhofsvorsteherin-System $S_1$

Der Zug fährt mit Geschwindigkeit  $v$  durch den Bahnhof. Auch für die Bahnhofsvorsteherin stellt die Messerschneide eine Welle dar:  $y = \hat{y} \sin(k_1 x_1 - \omega_1 t_1)$ .

### 3. Vergleich der Beobachtungen in $S_0$ und $S_1$

Wenn wir mit dem Stecken einem Gartenzaun entlang streichen, so wissen wir, dass sich die Ratterfrequenz ändert, wenn wir schneller laufen. Wir erwarten, dass sich auch bei der Messerwelle die Kreisfrequenz ändert:  $\omega_1 \neq \omega_0$ . Die Koordinaten in den zwei Bezugssystemen hängen über eine Lorentztransformation zusammen. Invarianten sind in allen Inertialsystemen gleich. Die Phase der Messerwelle ist so eine Invariante, denn eine Nullstelle der Messerwelle ist in allen Bezugssystemen dieselbe Nullstelle. Also gilt

$$k_1 x_1 - \omega_1 t_1 = k_0 x_0 - \omega_0 t_0 \quad \text{Lorentztransformation anwenden} \quad (1)$$

$$k_1 x_1 - \omega_1 t_1 = k_0 \gamma (x_1 + v t_1) - \omega_0 \gamma \left( t_1 + \frac{v}{c^2} x_1 \right) \quad (2)$$

Diese Gleichung muss für alle Orte und Zeiten gelten, insbesondere für  $x_1 = 0$ . Damit folgt

$$-\omega_1 t_1 = k_0 \gamma v t_1 - \omega_0 \gamma t_1 \quad (3)$$

Diese Gleichung kann für alle Zeitpunkte erfüllt werden, falls

$$\omega_1 = \omega_0\gamma - k_0\gamma v = \omega_0\gamma \left(1 - \frac{k_0 v}{\omega_0}\right) = \omega_0\gamma \left(1 - \frac{v}{u_0}\right) \quad (4)$$

Verwenden wir noch  $\omega = 2\pi f$ , so erhalten wir die Dopplerformel in der Standardform

$$f_1 = f_0\gamma \left(1 - \frac{v}{u_0}\right) = f_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \left(1 - \frac{v}{u_0}\right) \quad (5)$$

Je nach Bewegungsrichtung kann in der Klammer auch das andere Vorzeichen stehen.

### 3 Diskussion

Anstatt der Messerwelle, die nichts anderes als ein bewegter Massstab ist, hätte man auch die Schallwelle betrachten können, welche die Bestellung vom Mund der Kondukteurin zum Ohr des Kellners transportiert. Dann hat man den akustischen Dopplereffekt relativistisch gerechnet. Oder wie wärs mit folgender Geschichte: Der Kondukteur spritzt die Bahnhofsvorsteherin aus dem fahrenden Zug mit der Wasserpistole an. Er drückt während der Zeit  $T_0$  auf den Abzug und das Wasser spritzt mit  $u_0$  heraus. Während welcher Zeit  $T_1$  fühlt sich die Bahnhofsvorsteherin angegriffen? Die Antwort ist  $T_0 = T_1 \cdot \gamma \cdot (1 - v/u_0)$ .

Gleichung 5 unterscheidet sich in einem Punkt von der üblichen Dopplerformel  $f_1 = f_0\gamma(1 - v/c)$ : Statt der Lichtgeschwindigkeit  $c$  steht die Geschwindigkeit  $u_0$  der mechanischen Welle (oder des Massstabs). Das  $c^2$  im Lorentzfaktor  $\gamma$  ist "nur zufällig" gleich der Lichtgeschwindigkeit im Quadrat. Es gab mal den Vorschlag, das  $c^2$  in  $E = mc^2$  in "Einsteinkonstante" umzutauften. Diese Konstante lässt sich im Prinzip ohne Rückgriff auf die Elektrodynamik bestimmen, d.h. ohne das Postulat von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Sie folgt beispielsweise aus den Massen und Energien eines radioaktiven Zerfalls. Wenn sich einmal herausstellen sollte, dass Licht eine kleine Masse hat, würde sich das  $c^2$  in  $E = mc^2$  nicht ändern, wohl aber das  $c$  in der Dopplerformel. Da aber gegenwärtig das Licht keine Ruhemasse hat, bewegt es sich in allen Inertialsystemen mit derselben Schnelligkeit  $c = \sqrt{c^2}$ . Die Geschwindigkeit einer akustischen Welle, der Messerwelle oder des Wasserpistolenstrahls hängt hingegen vom Bezugssystem ab.

Bestrebungen, die spezielle Relativitätstheorie von der Elektrodynamik respektive dem Licht zu lösen, begannen im Jahr 1910 mit einem Vortrag von Wladimir Ignatowsky [1]. Unter dem Schlagwort "relativity without light" findet sich eine reichhaltige Literatur. Ein schönes Beispiel findet sich in [2]. Dort wird das Geschwindigkeitstransformationsgesetz aus allgemeinen Anforderungen (Homogenität des Raumes, Gruppenstruktur der Transformationen u.ä.) in der Form  $u + v = w + k \cdot uv$  hergeleitet ( $k = 1/c^2$ ).

Wie Einstein schon selbst bemerkt hat, ist sein Postulat von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit eigentlich überflüssig. Auch das berühmte Michelson-Morley Experiment ist unnötig; seine Bedeutung ist historischer Art. Einstein hat es in seiner Arbeit von 1905 jedenfalls nicht explizit erwähnt. Statt also im Unterricht den Äther, den die Schülerinnen und Schüler nicht kennen, einzuführen und mit dem nicht so einfachen Michelson-Morley Experiment zu zeigen, dass es ihn doch nicht gibt, kann man ohne diese Extraschleife direkt mit Beispielen anfangen. Falls man das zweite Postulat unbedingt verwenden will, weil es so praktisch und didaktisch hilfreich ist, lässt es sich auf einfachere Art motivieren.

25. Juni 2017, Lie.

### Literatur

- [1] W. von Ignatowsky "Einige allgemeine Bemerkungen über das Relativitätsprinzip", Physikalische Zeitschrift. 11, 1910b, S. 972–976
- [2] A. Sen, "How Galileo could have derived the special theory of relativity", Am. J. Phys. 62 (2), Feb. 1994, 157- 162