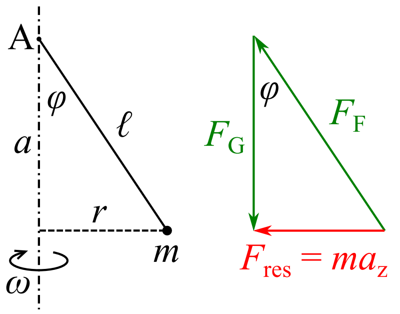
Konisches Stangenpendel

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

1 Einleitung

Das konische Pendel ist ein mathematisches Pendel, siehe Abbildung 1, das an einem Punkt A aufgehängt und dessen Pendelkörper gleichmässig auf einem horizontalen Kreis in Umlauf gebracht wird. Der Faden des Pendels überstreicht einen Kegel (Konus). Wie hängen Winkelgeschwindigkeit ω, Spreizwinkel φ und Kreisbahnradius r mit der Pendellänge ℓ, Masse m und Fallbeschleunigung g zusammen? Das konische Pendel ist von Robert Hooke um 1660 als Modell für die Planetenbewegung verwendet worden. Christiaan Huygens hat 1673 die Umlaufzeit angegeben.[1]



$$F_\mathrm{res} = ma_z \tag{1}$$

$$F_G \tan\varphi = m\omega^2 r \tag{2}$$

$$mg\,\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = m\omega^2\ell\sin\varphi \tag{3}$$

$$\text{1. Lsg.}\ \sin\varphi_1 = 0 \tag{4}$$

$$\text{2. Lsg.}\ \cos\varphi_2 = \frac{g}{\ell\omega^2} \tag{5}$$

Abbildung 1: konisches Pendel mit Kräfteplan

Falls das Pendel schnell genug dreht ($\omega^2 > g/\ell$), ist seine Umlaufzeit $T = 2\pi\sqrt{\ell\cos\varphi_2/g}$, d.h. gleich der Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels der Länge $a = \ell\cos\varphi$ (Abb. 1).

Das konische Pendel ist ein hübsches Beispiel zur Kreisbewegung. Die Diskussion ist auch Gymnasiastinnen und Mittelschülern zugänglich. Wie sieht es aber aus, wenn als Pendel eine schwere Stange verwendet wird?

2 Konisches Stangenpendel

Eine dünne, gleichmässige Stange der Länge ℓ und Masse m wird wie in Abbildung 2 als konisches Pendel bewegt. Wir begeben uns ins mitrotierende Bezugssystem (Winkelgeschwindigkeit Ω des Bezugssystems relativ zu einem Inertialsystem). Dort ist die Stange in Ruhe. Die Drehmomente der Gewichts- und Zentrifugalkraft müssen sich kompensieren. Da die Stange ein ausgedehnter, starrer Körper ist, muss man sich überlegen, wo die Kräfte angreifen.

Die Erdanziehungskraft F_G greift im Gravizentrum an, das hier mit dem Massenmittelpunkt zusammenfällt, weil das Schwerefeld der Erde homogen ist. Das Drehmoment der Gewichtskraft bezogen auf den Punkt A ist also $M_G = r_G \cdot F_G = \frac{1}{2}\ell\,\sin\varphi \cdot mg$

Die Zentrifugalbeschleunigung $r\,\Omega^2$ variiert entlang der Stange. Um die Zentrifugalkraft zu bestimmen, müssen wir über alle Massenelemente integrieren.

$$F_Z = \int_0^\ell r \cdot \Omega^2 \cdot dm = \int_0^\ell s\ \sin\varphi \cdot \Omega^2 \cdot \frac{m}{\ell}\, ds = \tfrac{1}{2}\ell \sin\varphi \cdot \Omega^2 \cdot m \tag{6}$$

Das Resultat hätten wir erraten können, aber wo greift diese Kraft an? Die Zentrifugalkraft ist am Ende der Stange stärker als am Aufhängepunkt. Um den Angriffspunkt zu bestimmen, berechnen wir das Drehmoment M_Z der Zentrifugalkraft bezüglich A durch Integration entlang der Stange und stellen dieses als "Hebelarm × Kraft" dar. Dieses Drehmoment muss im Gleichgewicht jenes der Gewichtskraft kompensieren.

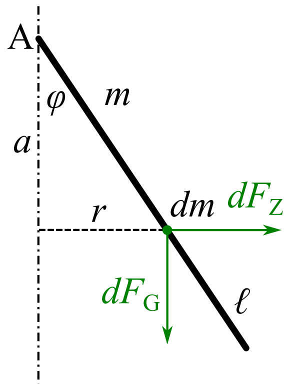


Abbildung 2: konisches Stangenpendel mit Zentrifugal- und Gewichtskraft auf ein Massenelement

$$\begin{aligned}
M_Z &= \int_0^\ell a \cdot dF_Z = \int_0^\ell a \cdot r\,\Omega^2\, dm && (7)\\
&= \int_0^\ell s\ \cos\varphi \cdot s \sin\varphi\ \Omega^2\, \frac{m}{\ell}\, ds && (8)\\
&= \tfrac{1}{3}\ell^2 \cos\varphi\ \sin\varphi \cdot \Omega^2 \cdot m && (9)\\
&= \tfrac{2}{3}\ell \cos\varphi \times \tfrac{1}{2}\ell \sin\varphi\, \Omega^2\, m && (10)
\end{aligned}$$

Der Angriffspunkt der Zentrifugalkraft ist 2/3 der Stangenlänge vom Aufhängepunkt A entfernt. Die Zentrifugalkraft greift nicht im Massenmittelpunkt an.

$$\begin{aligned}
&\text{Drehmomentgleichgewicht} & M_G &= M_Z && (11)\\
& & \tfrac{1}{2}\ell\ \sin\varphi\, mg &= \tfrac{1}{3}\ell^2 \cos\varphi\ \sin\varphi \cdot \Omega^2 \cdot m && (12)\\
& & \tfrac{1}{2}\ \sin\varphi\, g &= \tfrac{1}{3}\ell \cos\varphi\ \sin\varphi \cdot \Omega^2 && (13)\\
&\text{1. Lösung} & \sin\varphi_1 &= 0 && (14)\\
&\text{2. Lösung} & \cos\varphi_2 &= \frac{3g}{2\ell\Omega^2} && (15)
\end{aligned}$$

Für genügend hohe Winkelgeschwindigkeiten entspricht die Umlaufzeit $T = 2\pi\sqrt{2\ell\cos\varphi_2/(3g)}$ der Schwingungsdauer eines um $\cos\varphi_2$ verkürzten physikalischen Stangenpendels der Länge ℓ.

3 Ausblick

Der Angriffspunkt einer Kraft auf einen starren Körper kann sich vom Massenmittelpunkt unterscheiden. Das trifft sogar auf die Gravitationskraft zu, wenn das Schwerefeld inhomogen ist. Ein berühmtes Beispiel ist unser Mond. Er bewegt sich im inhomogenen Schwerefeld der Erde. Weil der Mond ausserdem nicht kugelsymmetrisch ist, unterscheiden sich Massenmittelpunkt und Gravizentrum. Aus diesem Grund kann die Gravitationskraft ein Drehmoment auf den Mond ausüben. Eine Folge ist die gebundene Rotation des Mondes.

Man soll Kräfte nicht unreflektiert im Schwerpunkt einzeichnen, sondern bei den richtigen Angriffspunkten.

10. Februar 2018, Lie.

---

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Conical_pendulum` (Abruf am 10. Feb. 2018)