

Induktiver Durchflussmesser

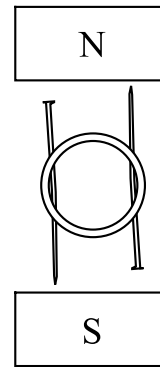
Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

1 Einleitung

Die Zeitschrift "aktuelle Technik" findet immer wieder den Weg auf unseren Kaffeetisch und beglückt uns mit Publiereportagen elektrotechnischen Inhalts. Ich blättere gern darin, denn die Zeitschrift nennt konkrete Zahlen für z.B. Drehfrequenzen, Leistungen und Drehmomente von real existierenden Motoren, die ich in Aufgaben verwende. In der letzten Ausgabe wurde für einen induktiven Durchflussmesser geworben. Das Inserat hat in mir das drängende Bedürfnis ausgelöst, einen solchen nachzubauen. Nach etwa einer halben Stunde hatte ich das halbe Schulzimmer unter Wasser gesetzt und den gewünschten Effekt gemessen. Im Abschnitt 2 wird das Experiment dargestellt, im Abschnitt 3 der Zweck dieses Artikels beschrieben und im Abschnitt 4 gebe ich die Unterrichtssequenz wieder, mit der ich das Induktionsgesetz motiviere.

2 Experiment

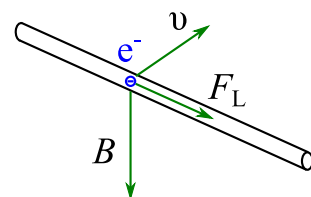
Abbildung 1: Ein Schlauch – im Querschnitt gezeichnet – wird mit zwei Nadeln durchstochen. Der Schlauch hat etwa 12 mm Innendurchmesser und die Nadeln haben im Innern ungefähr 8 mm Abstand. Die Stelle mit den Nadeln wird zwischen Nord- und Südpol eines starken Permanentmagneten geführt. Eine Messung hat dort die Flussdichte 0.11 T ergeben. Die Nadeln sind mit einem digitalen Voltmeter verbunden. Dreht man den Wasserhahn, der mit dem Schlauch verbunden ist, voll auf, so wird das Becken darunter (Länge 45 cm, Breite 30 cm, Tiefe 22 cm) innert 35 Sekunden gefüllt. Aus diesen Angaben folgt ein Volumenstrom von 0.85 Liter pro Sekunde respektive eine mittlere Strömungsgeschwindigkeit von 7.5 m/s im Schlauch. Das Voltmeter zeigt dann eine Spannung von 6 bis 7 mV an. Die Spannung steigt mit wachsendem Durchfluss. Aus dem Induktionsgesetz erhält man $U = vBs = 7.5 \text{ m/s} \cdot 0.11 \text{ T} \cdot 8 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 7 \text{ mV}$.



3 Induktion nach Mittelschulbüchern

Die sechs deutschsprachigen Physikbücher auf meinem Büchergestell enthalten alle Varianten folgender Argumentation (Abbildung 2):

Abbildung 2: Ein Draht wird mit konstanter Geschwindigkeit v durch ein homogenes Magnetfeld B bewegt. Die Lorentzkraft F_L verschiebt die freien Elektronen. Geschwindigkeit, Feldstärke und Draht stehen rechtwinklig aufeinander.



“Die Lorentzkräfte pumpen also Elektronen auf eine Seite des Drahtes, sodass das Drahtende negativ (Elektronenüberschuss) und das andere positiv (Elektronenmangel) geladen wird. Dadurch entsteht im Leiter ein Feld und zwischen den Enden des Leiters eine elektrische Spannung, die man *Induktionsspannung* nennt.

Die Grösse der Induktionsspannung ergibt sich aus der Überlegung, dass im Gleichgewicht Lorentzkraft und elektrische Kraft auf die Elektronen einander gerade aufheben müssen: $-evB = eE$.

Multiplizieren wir die elektrische Feldstärke E mit der Länge s des Drahtes, so erhalten wir die induzierte Spannung $U_{ind} = s \cdot E = s \cdot vB$ (Quelle dem Autor bekannt)

Diese Argumentation führt zwar betragsmässig zum korrekten Resultat, das sich auch aus der faradayschen Flussregel $U_{ind} = -d\Phi_m/dt$ herleiten lässt, ich misstrauere ihr aber aus folgenden Gründen:

Die Lorentzkraft verursacht eine Ladungstrennung. Die getrennten Ladungen erzeugen ein elektrisches Gegenfeld, welches die Wirkung der Lorentzkraft kompensiert: $eE = evB$ (Beträge). Man darf diesen Vorgang als Aufladung eines Kondensators betrachten. Die Aufladung eines Kondensators erfolgt exponentiell mit Zeitkonstante $\tau = RC$, d.h. die Gegenspannung ist zu Beginn noch gar nicht da. Die dritte Maxwellgleichung (das Induktionsgesetz $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$) enthält aber keine Retardierung!

Es ist schwierig, mit dieser Argumentation das Vorzeichen zu begründen, weil es nicht der Ursache (Lorentzkraft treibt Elektronen an) sondern der Wirkung (es entsteht ein Gegenfeld) zugeordnet wird. In einem gewöhnlichen Stromkreis wird zwischen Quellenspannung (Urspannung, “elektromotorische Kraft”) und “Spannungsabfall” am Widerstand, Kondensator oder Spule unterschieden. Was ist jetzt dieses U_{ind} ? Manchmal wird das Vorzeichen indirekt gefordert, weil sonst der Energiesatz verletzt wäre (Lenzsche Regel).

Albert Einstein hat in seiner berühmten Arbeit “Zur Elektrodynamik bewegter Körper” (1905) die spezielle Relativitätstheorie (SRT) aus der Elektrodynamik hergeleitet. Die SRT gilt jedoch allgemeiner. Ein erster Schritt zu dieser Erkenntnis waren die Arbeiten von Wladimir Ignatowski, der versucht hat, die Lorentztransformationen ohne das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit herzuleiten (1910). Zum Stichwort “Relativity without Light” findet sich eine reichhaltige Literatur im Internet. Als Konsequenz hat Leigh Page im Jahr 1912 die letzten beiden Maxwellgleichungen (Induktionsgesetz und Amperesches Gesetz) aus dem ersten Gesetz, das im wesentlichen das Coulombsche Gesetz darstellt, hergeleitet. Es ist also möglich, Induktion relativistisch zu begründen. Bei niedrigen Geschwindigkeiten, wie sie in Kraftwerks-Generatoren auftreten, ist das sogar möglich, ohne den ganzen Formelapparat der SRT aufzufahren: klassische Relativitätstheorie (Galilei) genügt.

4 Relativistische Einführung des Induktionsgesetzes

a) Laborsystem

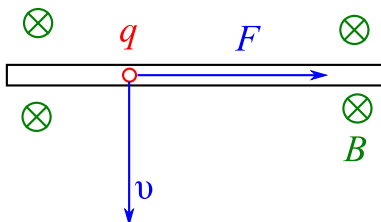


Abbildung 3: Ein gerader Leiter enthält freie Ladungsträger mit Ladung $q > 0$. Der Leiter wird mit konstanter Geschwindigkeit v durch ein homogenes Magnetfeld B bewegt. Die Ladungsträger bewegen sich zu Beginn ebenfalls mit v . Auf die Ladungsträger wirkt die magnetische Kraft $F = qvB$.

b) Ruhesystem

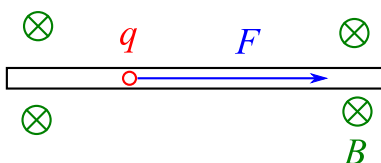


Abbildung 4: Wir bewegen uns in Gedanken mit dem Leiter. Die Ladungstrennung stellt sich immer noch ein, d.h. die Kraft wirkt immer noch, aber es kann keine magnetische Kraft mehr sein, da in diesem Bezugssystem die Ladung anfangs ruht. Die einzige Alternative ist, dass eine elektrische Kraft $F = qE$ wirkt.

c) Vergleich der Beobachtungen

Trotz Wechsel des Bezugssystems bleibt die Kraft gleich, denn es stellt sich dieselbe Wirkung ein.

$$qE = qvB \Rightarrow E = vB \quad (\text{Beträge})$$

Durch Wechsel des Bezugssystems ist aus einem magnetischen ein elektrisches Feld geworden! Die Beziehung $E = vB$ ist ein Spezialfall: Die vollständigen Transformationsgleichungen finden sich in der genannten Arbeit Albert Einsteins. Über die Länge s des Leiters wird also folgende Spannung induziert:

$$U_{\text{ind}} = Es = vBs$$

d) Vorzeichen

Um das Vorzeichen festzulegen, wählen wir in Abbildung 5 ein rechtshändiges Koordinatensystem: x-Achse nach rechts, y-Achse nach oben, z-Achse aus der Zeichenebene heraus. Aus $E = vB$ (Beträge) wird $E_y = \pm v_x B_z$.

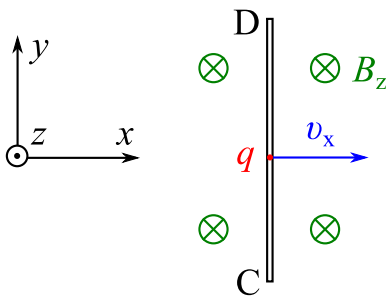


Abbildung 5: Der Leiter werde in einem Magnetfeld nach rechts (positive x-Richtung) geführt. Die Kraft auf die positive Probeladung q zeigt nach oben (positive y-Richtung). Die Länge des Leiters wird in die technische Stromrichtung gemessen, hier von C nach D: $s_y = s_{CD} > 0$. Im gleichen Sinn wird die Spannung gemessen.

Die magnetische Kraft auf die positive Probeladung in Abb. 5 zeigt nach oben, ebenso die elektrische Kraft und die elektrische Feldstärke, d.h. $E_y > 0$ und $U_{\text{ind}} = E_y s_y > 0$. Nun ist aber $v_x > 0$ und $B_z < 0$, d.h. nur mit $E_y = -v_x B_z$ kann das Vorzeichen übereinstimmen.

Das Vorzeichen in $U_{\text{ind}} = -d\Phi/dt \stackrel{\text{hier}}{=} E_y s_y = -v_x B_z s_y$ ergibt sich aus der Transformation des elektromagnetischen Feldes. Die Induktionsspannung ist die Quellenspannung und nicht die Gegenspannung des mit Verzögerung aufgebauten, elektrischen Gegenfelds.

e) Epilog

Meine Schülerinnen und Schüler spitzen immer die Ohren, wenn ich etwas zur Relativitätstheorie ankündige, auch jene im musisch-neusprachlichen Profil. Die Sequenz führt eine alltägliche und wichtige Anwendung der speziellen Relativitätstheorie vor. Das Vorzeichen lasse ich meist weg, dafür zeige ich die Gleichwertigkeit mit der faradayschen Flussregel. Die Flussregel führt in einem einfachen Fall auf $U_{\text{ind}} = d\Phi/dt = d(A \cdot B)/dt = dA/dt \cdot B + A \cdot dB/dt$. Die erste Hälfte des letzten Terms lässt sich leicht mit $v_x s_y B$ identifizieren. Der zweite Summand benötigt eine erweiterte, relativistische Betrachtung: Ein variierendes Magnetfeld am Ort des Leiters kann durch eine z.B. zeitliche Zunahme der Feldstärke oder durch eine Bewegung an einen Ort mit stärkerem, statischem Feld erklärt werden.

“The rotating armatures of every generator and every motor in this age of electricity are steadily proclaiming the truth of relativity theory to all who have ears to hear.” (Leigh Page)