# Charakteristik einer Glühlampe

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, Zürich

**Einleitung:**

Um den Schüler/innen die Schönheit des Ohmschen Gesetzes näherzubringen, ist es unbedingt nötig, ihnen ein Gegenbeispiel vorzuführen. Eine Möglichkeit dazu stellt das unten beschriebene Experiment dar, das sich leicht im Rahmen eines Praktikums durchführen lässt. Die Daten sind geeignet, um an ihnen das Arbeiten mit Regressionsfunktionen zu üben.

**Experiment:**

Mit zwei Digitalmultimetern und einer von 0 bis 250 V verstellbaren Gleichspannungsquelle habe ich die Strom-Spannungs-Charakteristik einer gewöhnlichen 220V-75W Haushaltglühbirne gemessen. Die Messwerte sind in Figur 1 graphisch dargestellt. Betrachtet man das Diagramm, so fallen zwei Dinge auf: Erstens ist der Strom nicht proportional zur Spannung, das Ohmsche Gesetz gilt also nicht über den ganzen Bereich. Zweitens liegen die Punkte auf einer Kurve, die ähnlich aussieht wie der Graph von $y = x^{1/2}$. (Nur für grössere Spannungen, bei kleineren erwartet man selbstverständlich I    U.) Könnte der Verlauf eine Potenzfunktion mit reellem Exponenten darstellen? Die Hypothese wäre I□ □U□ oder in Gleichungsform:

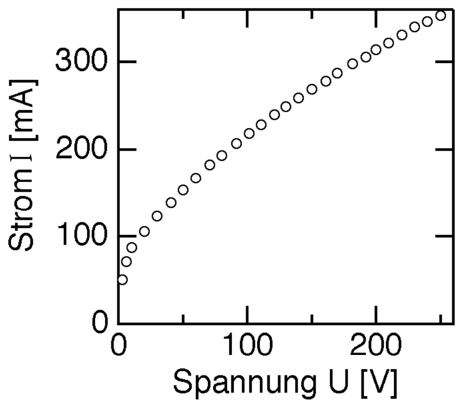
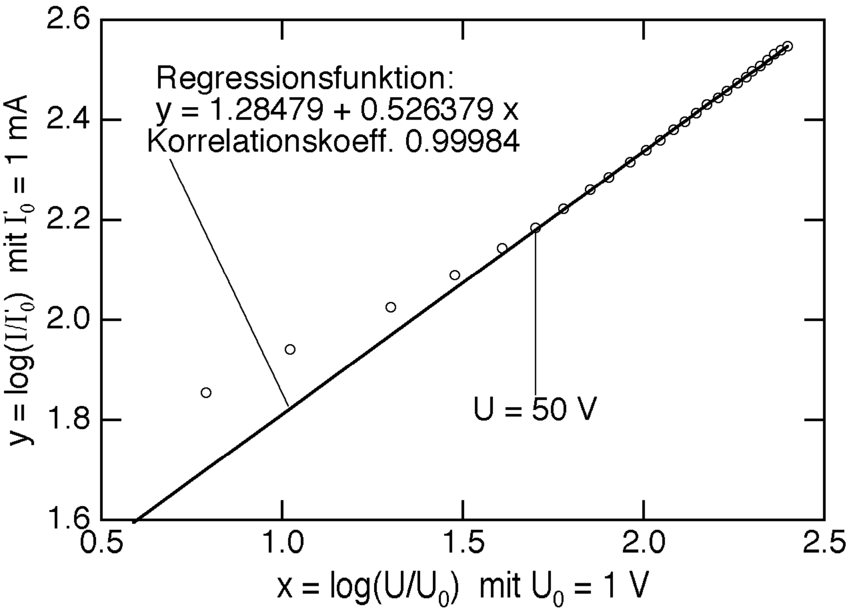



Fig. 1: Strom-Spannungs-Kennlinie einer 220V-75W-Glühbirne

$$I / I_0 = (U / U_0)^{□}$$

Um diese Hypothese zu prüfen, verwendet man eine doppelt logarithmische Darstellung der Messwerte (Figur 2). Trifft die Hypothese zu, sollten die Punkte auf einer Geraden liegen.

Figur 2: Doppelt logarithmische Darstellung der Messwerte aus Figur 1 zusammen mit einer Regressionsgeraden, welche für Spannungen ab 50 V berechnet wurde.



Es fällt auf, dass die Punkte nur für Spannungen über etwa 40 V auf einer Geraden liegen. Bei dieser Spannung beginnt der Wolframdraht sichtbar zu glühen. Beschränkt man sich auf Spannungen über 50 V, kann man die Hypothese bestätigen und mit einer linearen Regression die Parameter bestimmen. Wählt man $U_0 = 1$ V und $I'_0 = 1$ mA ergibt sich für diese Glühbirne $\log(I/I'_0) = \alpha \cdot \log(U/U_0) + \beta$ mit $\alpha = 0.526$ und $\beta = 1.285$. Das konstante Glied in der Geradengleichung ($\beta$) kann man zum Verschwinden bringen, wenn man $I_0 = I'_0 \cdot 10^{\beta} = 1\,\text{mA} \cdot 10^{1.285} = 19.3$ mA setzt. Gemittelt über alle Messwerte beträgt der Unterschied zwischen gemessenem und berechnetem Strom lediglich 1.36 mA (RMS), und das bei einem durchschnittlichen Strom von 230 mA! In der Literatur[1] werden solche Gesetze mit $\alpha = 0.5 .. 0.6$ angegeben, je nachdem, ob es sich um eine Vakuum-, eine Halogen- oder eine gasfüllte Lampe handelt.

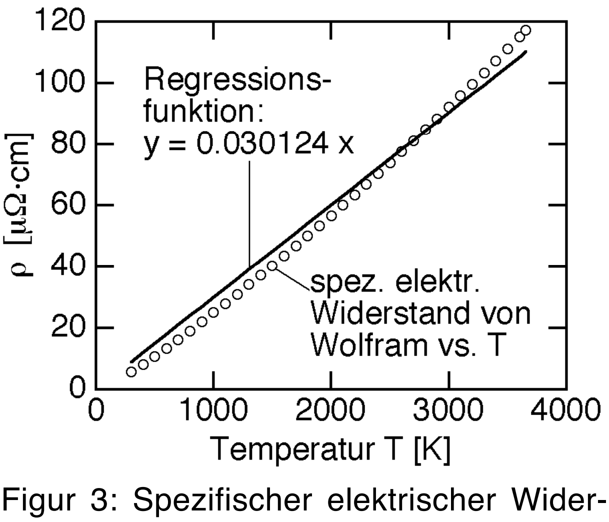
Wie gross wäre der Strom durch zwei solche Glühlampen in Serie an 220 V? An jeder Glühbirne liegt die Spannung U = 110 V, also ist $I = I_0\ (U/U_0)^{\alpha} = 19.3\,\text{mA}\ (110\,\text{V} / 1\,\text{V})^{0.526} = 229$ mA. (Der am nächsten liegende Messwert ist 111 V und 228.5 mA.)

Wie gross wären Strom I durch und Spannung U über der Glühlampe, wenn man sie mit einem $R = 100\ \Omega$ Vorschaltwiderstand an $U_N = 250$ V betriebe? Der Strom durch den Widerstand und die Lampe müssen gleichgross sein: $I = I_0\ (U/U_0)^{\alpha} = (U_N - U)/R$. Diese Gleichung lässt sich nur numerisch oder graphisch lösen. Zur graphischen Lösung kann man die Gerade $(U_N - U)/R$ in Figur 1 einzeichnen und den Schnittpunkt abschätzen. Bei numerischer Lösung erhält man U = 189.5 V und I = 305 mA.

Wie variiert der Widerstand der Glühbirne? $R(U) = (U_0/I_0) \cdot (U/U_0)^{1-\alpha}$ resp. $R(I) = (U_0/I_0) \cdot (I/I_0)^{1/\alpha - 1}$ (Gilt nicht für kleine Spannungen oder während des Einschaltvorgangs!)

**Theorie**:

Ist das Verhalten $I \propto U^{\alpha}$ erklärbar? Nimmt man vereinfachend an, dass im Gleichgewicht die von der Glühwendel aufgenommene Leistung P diese in Form von Wärmestrahlung wieder verlässt, so kann man $P = U \cdot I = U^2/R(T) \propto T^4$ ansetzen, wobei T die absolute Temperatur und R(T) der temperaturabhängige Widerstand der Wendel ist. Was man noch benötigt, ist die Abhängigkeit des (spezifischen) elektrischen Widerstandes von der Temperatur für einen Wolfram-Lampendraht (vergl. Figur 3). Im Rahmen dieser Näherungsrechnung darf man sicher $\rho \propto R \propto T$ setzen. Aus den angeführten Beziehungen kann man Temperatur sowie Widerstand eliminieren. Man

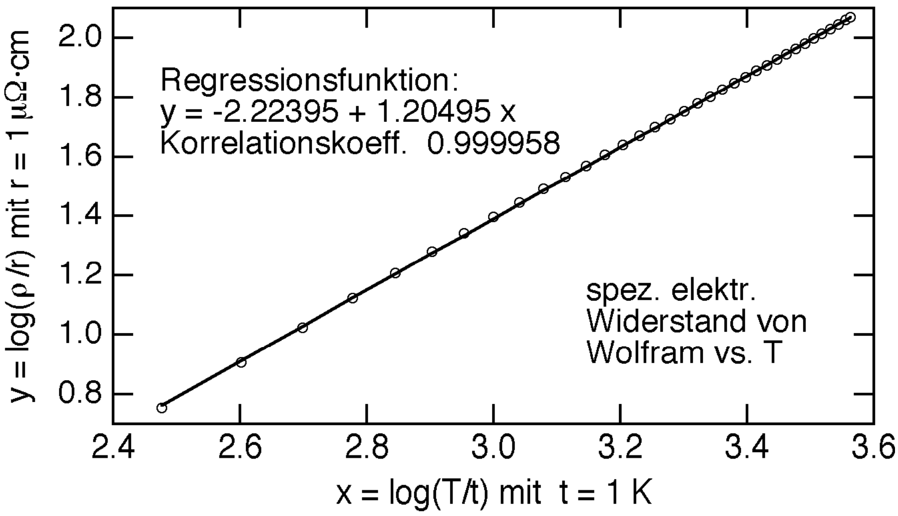



Figur 3: Spezifischer elektrischer Widerstand $\rho$ von Wolfram[2] aufgetragen gegen die absolute Temperatur T. Ebenfalls eingezeichnet ist der Graph der Proportionalität $\rho = a \cdot T$, wobei $a = 0.0301 \cdot 10^{-8}\ \Omega\text{m} \cdot \text{K}^{-1}$ nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt wurde.

erhält $I \propto U^{3/5} = U^{0.60}$, ein Resultat, das gut zum ex-perimentell ermittelten Wert passt.

Bemerkung zu Figur 3: Offensichtlich kann der Fit verbessert werden, wenn man statt einer Proportionalität die Funktion $\rho = a \cdot T + b$ verwendet. Man erhält $a = 0.0335 \cdot 10^{-8}$ $\Omega\mathrm{m} \cdot \mathrm{K}^{-1}$ und $b = -8.39 \cdot 10^{-8}$ $\Omega\mathrm{m}$ mit einem Korrelationskoeffizienten von 0.9987. Das so berechnete $\rho$ weicht im Mittel $1.70 \cdot 10^{-8}$ $\Omega\mathrm{m}$ (RMS) von den tabellierten Werten ab, bei der Proportionalität waren es noch $4.15 \cdot 10^{-8}$ $\Omega\mathrm{m}$ (bei einem durchschnittlichen spezifischen elektrischen Widerstand von $58.5 \cdot 10^{-8}$ $\Omega\mathrm{m}$).

Man kann auch bei diesen Daten noch versuchen, einen besseren Fit zu finden. In Figur 4 sind dieselben Literaturwerte[2] wie in Figur 3 doppelt logarithmisch aufgetragen.




Figur 4: Doppelt logarithmische Darstellung des spezifischen elektrischen Widerstands $\rho$ von Wolfram[2] gegen die absolute Temperatur T zusammen mit einer Regressionsgeraden.

Weil die Punkte auf einer Geraden zu liegen scheinen, ist ein Fit mit der Funktion $\rho = \rho_0 \cdot (T/T_0)^{\alpha}$ mit $T_0 = 1\,\mathrm{K}$ sinnvoll. Man erhält $\alpha = 1.20$ und $\rho_0 = 5.97 \cdot 10^{-11}$ $\Omega\mathrm{m}$. Die gemittelte Abweichung (RMS) dieses Fits von den Daten beträgt nur noch $0.257 \cdot 10^{-8}$ $\Omega\mathrm{m}$. Eliminiert man aus den Beziehungen $P = U \cdot I = U^2/R \propto T^4$ und $\rho \propto R \propto T^{1.20}$ die Temperatur und den Widerstand, dann erhält man $I \propto U^{0.538}$, was noch besser zu den Daten von Figur 1 passt! Dass wir $\rho \propto R$ gesetzt und somit die Längenausdehnung vernachlässigt haben, ist sicher zulässig, denn der Temperaturkoeffizient der Längenausdehnung ist rund drei Grössenordnungen kleiner als jener des spezifischen elektrischen Widerstandes.

**Literatur**:


[1] Technische Optik, G. Schröder, Kamprath-Reihe, Vogel Fachbuch, 1990, S. 83

[2] CRC Handbook of Chemistry and Physics, 71st Edition, CRC Press, p. 10-283