Zeichnen mit dem Gartenschlauch

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, lieberhm@mng.ch

1 Einleitung

Im heissen Sommer 2015 hatte ich reichlich Gelegenheit, meinen Rasen zu giessen. Da der Rasen die Spielwiese meiner Kinder ist, verlor ich gelegentlich die Herrschaft über den Gartenschlauch und wurde das Opfer wässriger Fehlschüsse. Die Kinder können den Schlauch natürlich nicht ruhig halten. Eine (simulierte) Momentaufnahme des Strahls kann wie in Abbildung 1 aussehen.

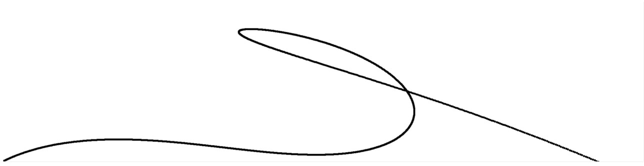

Abbildung 1: Wird ein Gartenschlauch in vertikaler Richtung geschüttelt, so kann der Wasserstrahl momentan eine Schlaufe bilden. In der zweidimensionalen Simulation wurde ignoriert, dass sich ein Strahl normalerweise in einzelne Tropfen zerlegt.

In Abbildung 1 bildet der Strahl eine Schlaufe. Kann man den Schlauch gezielt so bewegen, dass sich momentan ein perfekter Kreis bildet? Diese akademische Aufgabe ist eine Variation zum Thema schiefer Wurf.

2 Theorie

Die Wassertropfen folgen Wurfparabeln. Die gepunktete Linie in Abbildung 2 ist der geometrische Ort gleicher Flugzeiten. Der Abschuss erfolgt gleichzeitig im Nullpunkt des Koordinatensystems.

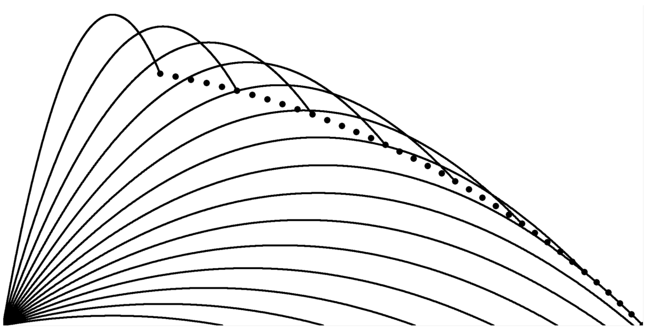

Abbildung 2: Wurfparabeln mit gleicher Abschussschnelligkeit für verschiedene Abschusswinkel. Die fetten Punkte sind Positionen gleicher Flugzeit. Es ist also möglich, verschiedene Punkte im Raum gleichzeitig zu treffen, wenn nur die Flugzeiten unterschiedlich genug sind.
N.B. Aus dem Unabhängigkeitssatz folgt, dass die fetten Punkte auf einem Kreis liegen.

Mit Anfangsschnelligkeit v, Abschusswinkel α (gegen die Horizontale), Fallbeschleunigung g, Zeitpunkt t sowie den Koordinaten x und y erhalten wir die Wurfparabelgleichung (1) sowie die Koordinaten als Funktion der Zeit (2). Will man ein Ziel bei (x, y) treffen, so muss man die Wurfparabelgleichung nach dem Abschusswinkel auflösen. Kennt man den Abschusswinkel und das Ziel, so kann man die Flugdauer vom Nullpunkt

(Abschussort) bis zum Ziel berechnen.

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2\upsilon^2\cos^2\alpha} \quad \Rightarrow \qquad \tan\alpha = \frac{\upsilon^2 \pm \sqrt{\upsilon^4 - g\cdot(gx^2 + 2\upsilon^2 y)}}{gx} \tag{1}$$

$$x = t\,\upsilon\cos\alpha \rightarrow t = \frac{x}{\upsilon}\sqrt{1+\tan^2\alpha} \qquad y = t\,\upsilon\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$

3 Zielwasser

Mit den Gleichungen (1) - (2) kann man untersuchen, ob alle Punkte einer Zielmenge gleichzeitig erreichbar sind. In den Abbildungen 3 und 4 ist die Zielmenge eine vertikale Strecke respektive ein vertikaler Kreis. Den Rechnungen liegt $\upsilon = 10\,\mathrm{m/s}$ und $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ zugrunde.

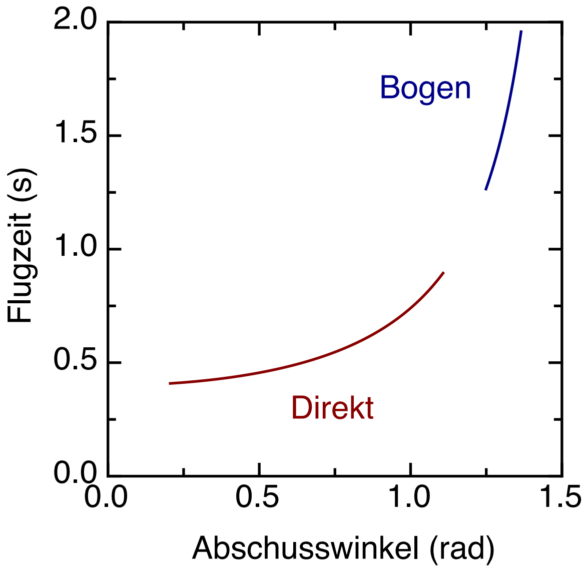

Abbildung 3: Flugzeit versus Abschusswinkel für den Direkt- und Bogenschuss, wenn das Ziel eine vertikale Linie ist: $x = 4\,\mathrm{m}$, $y = 0\ldots4\,\mathrm{m}$

Der Flug ans obere Ende dieser Linie dauert länger als der Flug ans untere Ende. Schiesst man den Strahl zur Zeit $t = -0.89\,\mathrm{s}$ unter dem Winkel $\alpha = 1.11\,\mathrm{rad}$ ab, bewegt den Schlauch geeignet nach unten, bis er zur Zeit $t = -0.41\,\mathrm{s}$ unter $\alpha = 0.21\,\mathrm{rad}$ spritzt, so erreicht das Wasser gleichzeitig zur Zeit $t = 0$ die vertikale Linie im Direktschuss; analog geht man beim Bogenschuss vor.

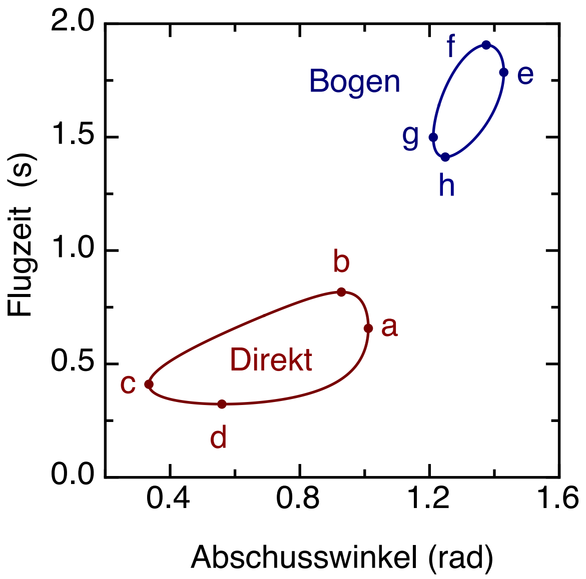

Abbildung 4: Flugzeit versus Abschusswinkel für den Direkt- und Bogenschuss, wenn das Ziel ein vertikaler Kreis ist: $x = x_z + r\cos\varphi$, $y = y_z + r\sin\varphi$, $r = 1.5\,\mathrm{m}$, $x_z = 4\,\mathrm{m}$, $y_z = 2\,\mathrm{m}$, $\varphi = 0\ldots2\pi$ *(Polarwinkel)*

Die Extrema a-h entsprechen folgenden Polarwinkeln:
Direktschuss $\varphi_b = 0.93\,\mathrm{rad}$, $\varphi_a = 1.92\,\mathrm{rad}$,
$\varphi_d = 3.71\,\mathrm{rad}$, $\varphi_c = 4.63\,\mathrm{rad}$
Bogenschuss $\varphi_g = 0.56\,\mathrm{rad}$, $\varphi_h = 1.25\,\mathrm{rad}$,
$\varphi_e = 3.32\,\mathrm{rad}$, $\varphi_f = 4.52\,\mathrm{rad}$ $(\pm 0.01\,\mathrm{rad})$

Es ist unmöglich, den ganzen Kreis im Direktschuss zu bilden, denn man müsste gleichzeitig in zwei verschiedene Richtungen spritzen. Es lässt sich aber ein Abschnitt des Kreises im Direktschuss und ein anderer im Bogenschuss bilden. Die Abschnitte ergänzen sich leider nicht zum Vollkreis.

Der Abschusswinkel eines Wasserstrahls lässt sich so steuern, dass der Strahl zu einem bestimmten Zeitpunkt gewissen Figuren in der Luft bildet, aber ein Smiley dürfte schwierig werden.
27. November 2015, Lie.