

Fliegender Teppich

Martin Lieberherr

Mathematisch Naturwissenschaftliches Gymnasium Rämibühl, 8001 Zürich

Einleitung

In vielen Märchen tritt das Motiv des fliegenden Teppichs auf, letztmals im Film Aladin aus den Disney-Studios (s. Bemerkung). Sie wissen sicher, dass es physikalisch erlaubt ist, auf einem Teppich einige Meter über dem Boden zu fliegen: Es gibt nämlich kein Naturgesetz, das strikte verbietet, einen kleinen Anteil innerer Energie in potenzielle Energie umzuwandeln. Fliegen ist also in einem mathematischen Sinn nicht unmöglich. (Banale Erklärungen wie Sprünge lassen wir hier beiseite.) Wenn Sie das Ihren Schülerinnen und Schülern erzählen, werden Sie natürlich zu Recht ausgelacht, aber wer zuletzt lacht, lacht am besten!

Theorie

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit \square , sich selbst auf einer Höhe $h \geq 1$ m über dem Boden wiederzufinden? Ludwig Boltzmann, einer der Begründer der statistischen Mechanik, hat den Faktor berechnet, der diese Wahrscheinlichkeit beschreibt:

$$\square \sim e^{-\frac{E}{kT}}$$

Boltzmannfaktoren treten in vielen Zusammenhängen auf, z.B. in der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung oder der elektrischen Leitfähigkeit eines Halbleiters. In unserem Beispiel gilt:

$$\square(h) = e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

Wir können diese Formel den Schülern und Schülerinnen kaum herleiten, aber wir können zumindest Spezialfälle überprüfen:

$$\square(0) = 1 = 100\% \quad (\text{stimmt, auf irgendeiner Höhe } h \geq 0 \text{ muss man ja sein})$$

$$\square(\infty) = 0 \quad (\text{stimmt, in sehr grosser Höhe ist niemand anzutreffen})$$

Setzen wir plausible Zahlen für einen fliegenden Menschen ein:

$$\square(1 \text{ m}) = e^{-\frac{70 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 1 \text{ m}}{1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 310 \text{ K}}} = e^{-1.61 \cdot 10^{23}} = \underline{\underline{10^{-7 \cdot 10^{22}}}}$$

Diese Zahl ist so klein, dass viele meiner Schülerinnen und Schüler daran scheiterten, sie auf dem Taschenrechner darzustellen. (War zugegeben gemein von mir, aber so haben sie zumindest die Logarithmenregeln repetiert.)

Praktisches Beispiel

Menschen können also kaum fliegen, aber wie sieht es für ein Stickstoffmolekül aus?

$$\square(1 \text{ m}) = e^{-\frac{mgh}{kT}} = e^{-\frac{28 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 1 \text{ m}}{1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 300 \text{ K}}} = e^{-1.1 \cdot 10^{-4}} = \underline{\underline{99.989\%}}$$

Moleküle sind tatsächlich meistens hoch fliegend anzutreffen. Das ist auch gut so, sonst hätten wir ja keine Atmosphäre. Man sieht sofort die Verwandtschaft mit der

barometrischen Höhenformel:

$$p(h) = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}} = p_0 e^{-\frac{\rho_0 gh}{p_0}}$$

Die barometrische Höhenformel in der Form $h = \ln(p_0/p(h))$ (moderne Schreibweise) stammt von Edmond Halley (1686), die vollständige Fassung von Pierre Simon de Laplace (1821). Der Druck ist bei konstanter Temperatur proportional zur Teilchendichte und diese ist wiederum proportional zur Wahrscheinlichkeitsdichte. Die Wahrscheinlichkeitsdichte, ein Teilchen auf einer bestimmten Höhe anzutreffen, ist im Wesentlichen die Ableitung der Wahrscheinlichkeit ρ , das Teilchen über einer bestimmten Höhe zu finden, nach der Höhe.

Bemerkung

Als ich in meinen Märchenbüchern und im Internet nach fliegenden Teppichen suchte, musste ich feststellen, dass das Motiv in den "Märchen aus 1001 Nacht" nicht vorkommt, insbesondere nicht in der Erzählung von Aladin, das war eine Verfälschung à la Disney. In der "Geschichte des Prinzen Ahmed und der Fee Pari" wird Prinz Husein ein Wunderteppich angeboten, der eine Person an einen beliebigen Ort versetzt. Das ist aber kein Teppichflug, wie ich ihn mir vorstellte.