

Duffing-Oszillator

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, 8001 Zürich

Einleitung



Abbildung 1: *Mein Sohn auf dem ‘Flugsimulator’. Wie bewegt er sich bei grösserer Amplitude?*

Ab und zu werde ich mit den Kleinen auf den Spielplatz geschickt. Und da ich nicht anders kann, stosse ich natürlich auch dort immer wieder auf physikalische Aufgaben. Mein Sohn auf dem ‘Flugsimulator’, siehe Abbildung 1, kann in nullter Näherung als angetriebenes Federpendel modelliert werden. Falls die Federkraft dem Hookeschen Gesetz folgt, ist die Theorie der erzwungenen Schwingung sogar (möglicher) Mittel-schulstoff. Es tritt Resonanz auf, wie man sie auch im Normalunterricht darstellt, siehe Abbildung 2. Aber wie bewegt sich das Pendel, wenn die Feder bei grosser Auslenkung nicht mehr linear reagiert? Ein solches

Problem ist vom deutschen Ingenieur Georg Duffing (1861-1944) behandelt worden (“Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung”, F. Vieweg u. Sohn, Braunschweig, 1918).

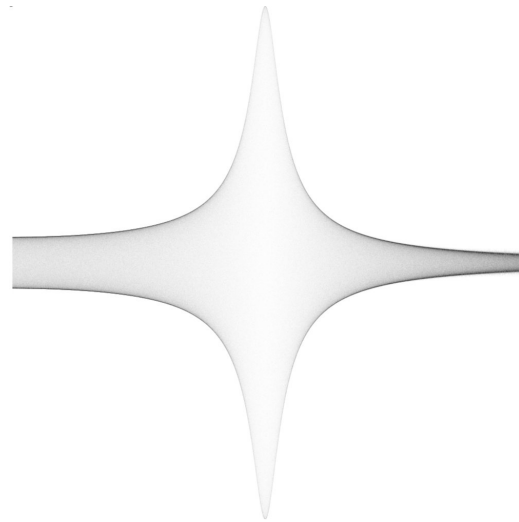


Abbildung 2: *Die Resonanz eines linearen Oszillators wie sie auf einem Oszilloskop zu sehen wäre. Die Bildbreite umfasst $0 \leq \omega \leq 2$, die Höhe $-2 \leq y \leq 2$. Die Parameterwerte sind $\delta = 0.1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$ und $\gamma = 0.2$ (in den gewählten Einheiten).*

Theorie

Die Duffing-Gleichung wird heute üblicherweise so dargestellt:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \delta \frac{dy}{dt} + \alpha y + \beta y^3 = \gamma \cos \omega t \quad (1)$$

Der Parameter δ beschreibt die Stärke der Dämpfung, $\alpha = \omega_0^2$ ist das Quadrat der Eigen-Kreisfrequenz des ungedämpften, linearen Oszillators, β ist ein Mass für die

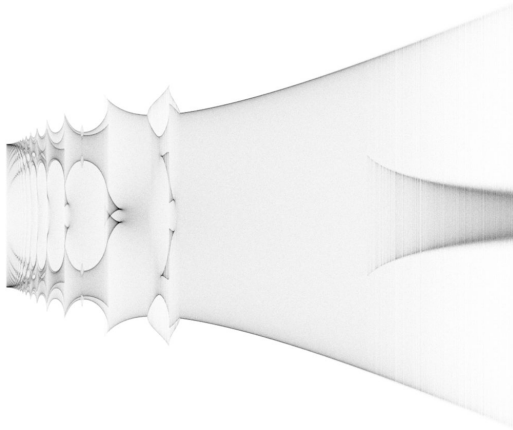


Abbildung 3: Antwort des nichtlinearen Duffing-Oszillators ($\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$ und $\delta = 0.1$) Die Bildbreite umfasst $0 \leq \omega \leq 3$, die Höhe $-3 \leq y \leq 3$.

Nichtlinearität des Pendels, γ beschreibt die Stärke der anregenden Kraft pro Masse und ω ist die Kreisfrequenz der harmonisch anregenden Kraft.

Was wird aus der gewohnten Resonanzkurve bei einem nichtlinearen Pendel? Wie Abbildung 3 zeigt, liegen die Dinge nicht mehr so einfach. Es treten zusätzliche Resonanzen, Bistabilitäten, Symmetriebrüche und bei geeigneter Parameterwahl auch Chaos auf. An eine geschlossene Lösung der Duffing-Gleichung ist nicht zu denken. Man ist auf numerische Simulationen angewiesen. Das Studium dieser Simulationen erlaubt dann manchmal Näherungslösungen für spezielle Fälle. Ein solcher Fall ist im Folgenden dargestellt.

Betrachten wir die freie Schwingung ($\gamma = 0$) bei schwacher Dämpfung ($\delta \approx 0$):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha y + \beta y^3 = 0 \quad (2)$$

Die Lösung $y(t)$ setzen wir als rudimentäre Fourierreihe an. Die numerische Simulation zeigt, dass diese Näherung nicht schlecht ist.

$$\text{Ansatz: } y(t) = A \cos \omega t + \dots \quad (3)$$

Bei fehlender Dämpfung tritt keine Phasenverschiebung zwischen Anregung und Ant-

wort auf, d.h. wir können den Term $B \sin \omega t$ in der Fourierreihe (3) weglassen. Wir setzen (3) in Gleichung (2) ein:

$$-\omega^2 A \cos \omega t + \alpha A \cos \omega t + \beta A^3 \left(\frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t \right) = 0 \quad (4)$$

Der Koeffizientenvergleich liefert für die Grundfrequenz ω :

$$-\omega^2 A + \alpha A + \frac{3}{4} \beta A^3 = 0 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{4(\omega^2 - \alpha)}{3\beta}} \quad (5)$$

Die Eigenfrequenz ist veränderlich – wie G. Duffing geschrieben hat – d.h. sie hängt von der Amplitude ab.

Experiment

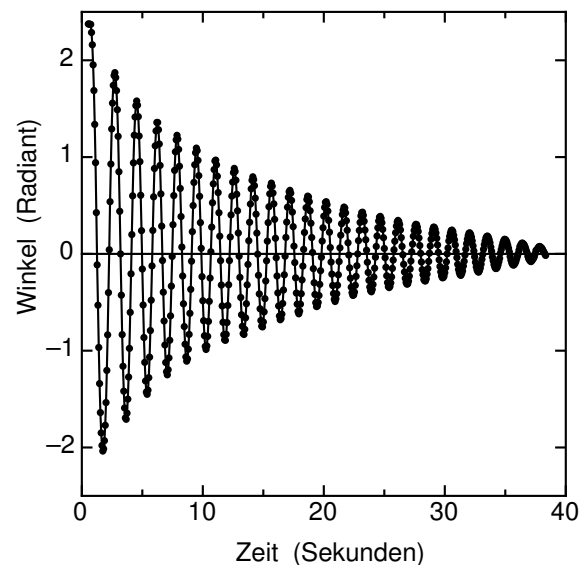


Abbildung 4: Momentanwerte (Winkel) eines freien Stangenpendels als Funktion der Zeit

Kann man den in Gleichung (5) beschriebenen Zusammenhang auch beobachten? Ein bekannter, nichtlinearer Oszillator ist das physikalische (mathematische) Pendel. Ich hängte einen schlanken Stab an einem Ende auf und liess ihn mit grosser Amplitude schwingen. Die Bewegung habe ich mit

einer einfachen Kamera videographiert und anschliessen mit Logger Pro analysiert. Die Momentanwerte y (Winkel φ) sind in Abbildung 4 abgetragen. Eine schwache Dämpfung lässt die Amplitude mit der Zeit abnehmen. Für jede ‘Periode’ bestimmte ich die am besten passende Sinuskurve durch eine Regression. So konnte ich die Amplitude und die zugehörige Kreisfrequenz bestimmen. Das Resultat ist in Abbildung 5 dargestellt. Passt man Gleichung (5) an die Daten, so erhält man eine befriedigende Übereinstimmung.

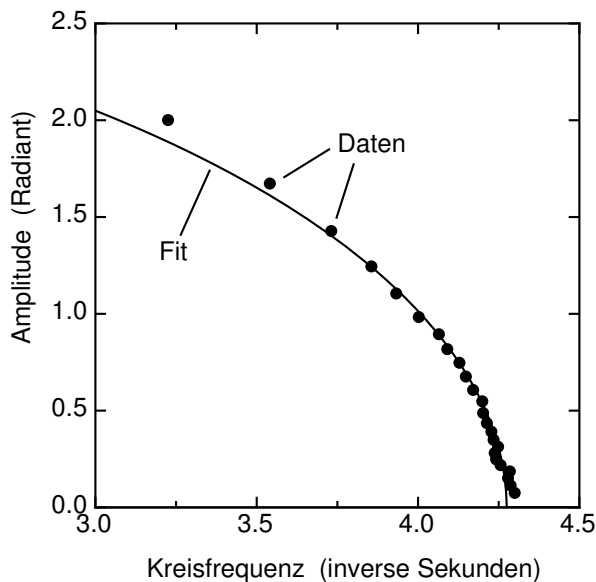


Abbildung 5: *Amplitude der freien Stangenpendel-Schwingung als Funktion der Kreisfrequenz. Der Fit entspricht Gleichung (5) mit den Parametern $\alpha = 18.27 \text{ s}^{-2}$ und $\beta = -2.94 \text{ s}^{-2} \text{ rad}^{-2}$*

Das physikalische Pendel hat bekanntlich eine exakte Lösung. Wie passt dessen Differentialgleichung (6) mit der Duffingschen Gleichung (1) zusammen? Entwickelt man den Sinus in (6) um $\varphi = 0$ herum bis zum kubischen Term, siehe Gleichung (7), so erhält man gerade die Duffingsche Gleichung:

chung:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \alpha \sin \varphi = 0 \Rightarrow \quad (6)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \alpha\varphi - \frac{\alpha}{6}\varphi^3 + \dots = 0 \quad (7)$$

Aus dieser Näherung folgt $\beta = \alpha/6$. Und tatsächlich liefert die Kurvenanpassung, siehe Abbildung 5, gerade $\alpha \approx 6\beta$. Für grosse Amplituden sind Abweichungen zu erwarten und für sehr kleine Amplituden wird die Videoanalyse ungenau.

Schluss

Soll man den Duffing-Oszillator im Regelunterricht zeigen? Die Zeit reicht wohl eher nicht. Als Minimalfassung könnte man, falls Resonanz überhaupt vertieft behandelt wird, neben Abbildung 2 auch eine Folie mit Abbildung 3 zeigen und kurz besprechen. Auf diese Weise erfahren die Schülerinnen und Schüler wieder einmal, dass die klassische Mechanik noch manche Überraschung bereit hält. Steht mehr Zeit zur Verfügung, so könnte man die Differentialgleichung numerisch untersuchen.